

Редкие полуплептонные распады B -мезонов

Александр Пархоменко, Ирина Парнова

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова



Демидовский
университет



Летняя научная школа «Супер с-тау фабрика»

ИЦФМ, МГУ (Саров), г. Саров

28 июля 2022 г.

Содержание

1. Введение
2. Теория редких распадов B -мезонов
3. Анализ полулептонного аннигиляционного распада
 $B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$
4. Анализ редкого полулептонного распада $B^+ \rightarrow \pi^+ \tau^+ \tau^-$
5. Заключение и дальнейшие перспективы исследований

Редкие распады, индуцированные $b \rightarrow s$ и $b \rightarrow d$ переходами

- Редкие полуплептонные распады B -мезонов, идущие за счет нейтральных токов с изменением аромата, особенно чувствительны к «новой физике»
- Экспериментально и теоретически хорошо исследованы распады B -мезонов, идущие за счет $b \rightarrow s$ перехода
- Что касается эксклюзивных распадов, идущих за счет $b \rightarrow d$ перехода, распад $B^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ впервые наблюдался коллаборацией LHCb в 2012 году, а позже на большей статистике было получено распределение по инвариантной массе $\mu^+ \mu^-$ -пары
- Сверхредкие чисто аннигиляционные моды распадов B -мезонов сильно подавлены в СМ
- В 2016 году коллаборация Belle представила результаты поиска радиационного распада аннигиляционного типа $B^0 \rightarrow \phi \gamma$
- В 2022 году верхний предел на полную вероятность полуплептонного аннигиляционного распада $B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$ был получен коллаборацией LHCb

Эффективный лагранжиан для $b \rightarrow s$ и $b \rightarrow d$ переходов

- Эффективный лагранжиан строится на основе Стандартной модели в случае малых переданных импульсов, т. е. тяжелые частицы — t -кварк, W - и Z -бозоны, а также хиггсовский бозон в теории отсутствуют
- В лагранжиан входят кварки с ароматами $q = u, d, s, c, b$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \mathcal{L}_{\text{QED}}(x) + \mathcal{L}_{\text{QCD}}(x) - \mathcal{H}_{\text{weak}}^{b \rightarrow d}(x) - \mathcal{H}_{\text{weak}}^{b \rightarrow s}(x)$$

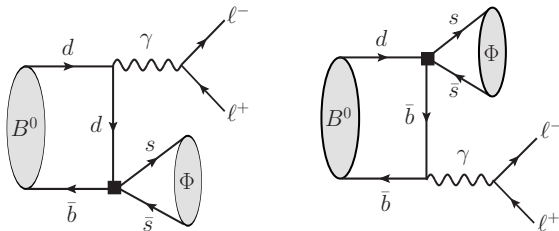
- Гамильтониан $\mathcal{H}_{\text{weak}}^{b \rightarrow d}$ содержит нейтральные токи с изменением аромата, характеризующие $b \rightarrow d$ переход

$$\mathcal{H}_{\text{weak}}^{b \rightarrow d} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{p=u,c} V_{pd}^* V_{pb} \sum_j C_j(\mu) \mathcal{P}_j(\mu) + \text{h. c.}$$

- G_F — константа Ферми
 $V_{q_1 q_2}$ — элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава
 $C_j(\mu)$ — вильсоновские коэффициенты
 $\mathcal{P}_j(\mu)$ — локальные операторы $b \rightarrow d$ перехода

Аннигиляционный распад $B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$

- Диаграммы, дающие наибольший вклад в амплитуду распада в древесном приближении



- Диаграммы определяются операторами $\mathcal{P}_3 = (\bar{d}\gamma_\mu Lb) \sum_q (\bar{q}\gamma^\mu q)$ и $\mathcal{P}_5 = (\bar{d}\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho Lb) \sum_q (\bar{q}\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho q)$
- Вклад правой подавлен массой b -кварка как $1/m_b$
- Вклады остальных 6 диаграмм будут подавлены по сравнению с левой на величины порядка α и α/m_b

Дифференциальная вероятность распада $B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-$

- Вклады в амплитуду от B - и ϕ -мезонов факторизуются
- Рассматривается область малых q^2 : $q^2 \lesssim M_{J/\psi}^2$
- Массами лептонов ($\ell = e, \mu$) пренебрегаем

$$\frac{d\mathcal{B}}{dq^2} = \tau_B \frac{G_F^2 |V_{td}^* V_{tb}|^2 \alpha^2}{216\pi} M_B f_B^2 f_\phi^2 Q_d^2 \lambda^3(1, m_\phi/M_B, \sqrt{q^2}/M_B) \\ \times |C_3 + 4C_5|^2 \left[\left| \lambda_{B,-}^{-1}(q^2) \right|^2 + \frac{m_\phi^2}{q^2 (1 - q^2/M_B^2)^2} \left| \lambda_{B,+}^{-1}(q^2) \right|^2 \right]$$

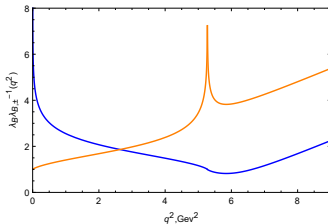
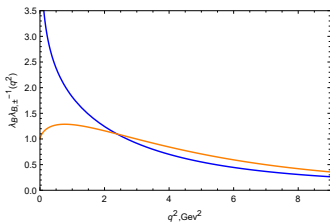
- $[\lambda_{B,\pm}^{-1}(q^2)]$ — первые обратные моменты амплитуд распределения B -мезона $\phi_\pm^B(\omega)$; непертурбативные величины, зависят от выбора модели амплитуд

Зависимость первых обратных моментов B -мезона от q^2

- Амплитуда распада пропорциональна q^2 -зависимым первым обратным моментам:

$$\lambda_{B,\pm}^{-1}(q^2) = \int_0^\infty \frac{\phi_\pm^B(\omega) d\omega}{\omega - q^2/M_B - i\epsilon}$$

- Используются две наиболее известные модели амплитуд:
Экспоненциальная (GN) и **Линейная (ККQT)**



- Синие линии означают зависимость $|\lambda_B \lambda_{B,+}^{-1}(q^2)|$ от q^2 ,
оранжевые линии описывают поведение $|\lambda_B \lambda_{B,-}^{-1}(q^2)|$,
соответственно

Численные результаты для $B^0 \rightarrow \phi l^+ l^-$ распада

- Дифференциальная вероятность распада:

$$\Delta\mathcal{B}(q_{\min}^2 < q^2 < q_{\max}^2) = \int_{q_{\min}^2}^{q_{\max}^2} \frac{d\mathcal{B}}{dq^2} dq^2$$

- Получены предварительные результаты для двух моделей:

GN модель:

$$\Delta\mathcal{B}(1 \text{ GeV}^2 < q^2 < 8 \text{ GeV}^2) = (2.14_{-0.96}^{+1.57}) \times 10^{-13}$$

KKQT модель:

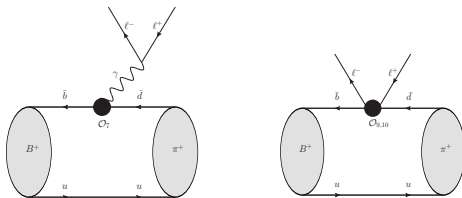
$$\Delta\mathcal{B}(1 \text{ GeV}^2 < q^2 < 8 \text{ GeV}^2) = (3.88_{-1.75}^{+2.85}) \times 10^{-13}$$

- Различие в значениях порядка неопределенности масштаба факторизации
- Оценка полной вероятности распада согласуется с ограничением, полученным LHCb:

$$\mathcal{B}_{th}(B^0 \rightarrow \phi l^+ l^-) \sim 10^{-12} \text{ [УЗФФ №4 (2022) 2241510]}$$

$$\mathcal{B}_{exp}(B^0 \rightarrow \phi \mu^+ \mu^-) < 3.2 \times 10^{-9} \text{ [JHEP 05 (2022) 067]}$$

Распад $B^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$



В амплитуду распада в древесном приближении дают вклад операторы $\mathcal{P}_{7\gamma}$, $\mathcal{P}_{9\ell}$ и $\mathcal{P}_{10\ell}$ ($N = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{td}^* \frac{e^2}{g_{st}^2}$):

$$\mathcal{M}_9 = N C_9 \langle \pi(p_\pi) | \bar{d}_L \gamma^\mu b_L | B(p_B) \rangle [\bar{U}(q_1) \gamma_\mu U(-q_2)]$$

$$\mathcal{M}_{10} = N C_{10} \langle \pi(p_\pi) | \bar{d}_L \gamma^\mu b_L | B(p_B) \rangle [\bar{U}(q_1) \gamma_\mu \gamma_5 U(-q_2)]$$

$$\mathcal{M}_7 = -i N \frac{2m_b}{q^2} C_7 \langle \pi(p_\pi) | \bar{d}_L \sigma^{\mu\nu} q_\nu b_R | B(p_B) \rangle [\bar{U}(q_1) \gamma_\mu U(-q_2)]$$

Матричные элементы выражаются через три скалярные функции $f_{+,0,T}(q^2)$ — формфакторы ($\Phi\Phi$) $B \rightarrow \pi$ перехода

Распределение по инвариантной массе $\ell^+\ell^-$ -пары в распаде $B \rightarrow P\ell^+\ell^-$

$$\frac{d\text{Br}(B \rightarrow P\ell^+\ell^-)}{dq^2} = S_P \frac{2G_F^2 \alpha_{\text{em}}^2 \tau_B}{3(4\pi)^5 m_B^3} |V_{tb} V_{tp}^*|^2 \beta_\ell \lambda^{3/2}(q^2) F^{BP}(q^2)$$

$$F^{BP}(q^2) = F_{97}^{BP}(q^2) + F_{10}^{BP}(q^2)$$

$$F_{97}^{BP}(q^2) = \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{q^2}\right) |C_9^{\text{eff}}(q^2) f_+^{BP}(q^2) +$$

$$+ \frac{2m_b}{m_B + m_P} C_7^{\text{eff}}(q^2) f_T^{BP}(q^2) + L_A^{BP}(q^2) + \Delta C_V^{BP}(q^2) \Big|^2$$

$$F_{10}^{BP}(q^2) = \left(1 - \frac{4m_\ell^2}{q^2}\right) |C_{10}^{\text{eff}} f_+^{BP}(q^2)|^2 + \frac{6m_\ell^2}{q^2} \frac{(m_B^2 - m_P^2)^2}{\lambda(q^2)} |C_{10}^{\text{eff}} f_0^{BP}(q^2)|^2$$

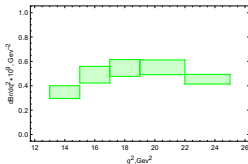
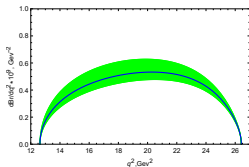
S_P — множитель, определяемый кварковой структурой мезона
 ($S_{\pi^\pm} = 1$ и $S_{\pi^0} = 1/2$)

$p = s, d$ — аромат кварка в $b \rightarrow p$ переходе

$$\beta_\ell = \sqrt{1 - 4m_\ell^2/q^2}, \quad \lambda(q^2) = (m_B^2 + m_P^2 - q^2)^2 - 4m_B^2 m_P^2$$

Распределение по инвариантной массе тауонов в распаде $B^+ \rightarrow \pi^+ \tau^+ \tau^-$

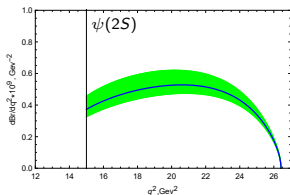
- Для графиков используется БКЛ параметризация



	БГЛ	БКЛ	мБКЛ	Faustov, Galkin Eur. Phys. J. C74 (2014) 2911
$\text{Br}_{\text{th}} \times 10^9$	$7.56^{+0.74}_{-0.43}$	$6.00^{+0.81}_{-0.49}$	$6.28^{+0.76}_{-0.46}$	7.00 ± 0.70

- С учетом вклада $B \rightarrow \psi(2S)(\rightarrow \bar{\ell}\ell)\pi$ резонанса

Спектр с учетом LDC



Зависимость от фаз для $\psi(2S)$ (БКЛ)

$\delta_{\psi(2S)}^{(u)}$	$\delta_{\psi(2S)}^{(c)}$	$\text{Br}(B^+ \rightarrow \pi^+ \tau^+ \tau^-) \times 10^{-9}$
SDC		$6.00^{+0.81}_{-0.49}$
0	0	$5.79^{+0.78}_{-0.48}$
0	π	$6.23^{+0.84}_{-0.50}$
0	$3\pi/4$	$6.05^{+0.80}_{-0.47}$
$\pi/2$	π	$6.24^{+0.84}_{-0.51}$
$3\pi/2$	0	$5.78^{+0.78}_{-0.48}$

Заключение и дальнейшие перспективы

- Для $B^0 \rightarrow \phi \ell^- \ell^+$ показано, что дифференциальная вероятность распада чувствительна к выбору моделей амплитуд распределения B -мезона
- Теоретическая оценка полной вероятности распада $B(B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-) \sim 10^{-12}$ согласуется с ограничением $B(B^0 \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-) < 3.2 \times 10^{-9}$, полученным коллаборацией LHCb
- Для $B^0 \rightarrow \phi \ell^- \ell^+$ планируется получить оценку вероятности распада во всей кинематически разрешенной области, а также произвести учет вклада от $\omega - \phi$ смешивания
- Получена теоретическая оценка полной вероятности распада $B^+ \rightarrow \pi^+ \tau^+ \tau^-$ для различных типов параметризаций формфакторов, показана зависимость полученных результатов от влияния вкладов больших расстояний (на примере БКЛ параметризации)
- Экспериментальное обнаружение такого рода распадов с достаточной точностью планируется коллаборацией Belle II на масштабах интегральной светимости $\sim 5 \text{ абн}^{-1}$

Backup Slides

Операторный базис

- Операторы $\mathcal{P}_j(\mu)$ размерности $d = 6$ используются для большинства феноменологических приложений
- Стандартный базис 4-фермионных операторов для $b \rightarrow d$ перехода

- **Древесные** операторы ($p = u, c$)

$$\mathcal{P}_1^{(p)} = (\bar{d}\gamma_\mu L T^a p)(\bar{p}\gamma^\mu L T^a b) \quad \mathcal{P}_2^{(p)} = (\bar{d}\gamma_\mu L p)(\bar{p}\gamma^\mu L b)$$

- **Пингвинные** операторы

$$\mathcal{P}_3 = (\bar{d}\gamma_\mu L b) \sum_q (\bar{q}\gamma^\mu q) \quad \mathcal{P}_4 = (\bar{d}\gamma_\mu L T^a b) \sum_q (\bar{q}\gamma_\mu T^a q)$$

$$\mathcal{P}_5 = (\bar{d}\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho L b) \sum_q (\bar{q}\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho q)$$

$$\mathcal{P}_6 = (\bar{d}\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho L T^a b) \sum_q (\bar{q}\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho T^a q)$$

- **Электромагнитный** и **хромомагнитный** дипольные операторы

$$\mathcal{P}_{7\gamma} = \frac{e}{16\pi^2} [\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(m_b R + m_d L)b] F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{P}_{8g} = \frac{g_{st}}{16\pi^2} [\bar{d}\sigma^{\mu\nu}(m_b R + m_d L)T^a b] G_{\mu\nu}^a$$

- **Полулептонные** операторы

$$\mathcal{P}_{9\ell(10\ell)} = \frac{\alpha}{2\pi} (\bar{d}\gamma_\mu L b) \sum_\ell (\bar{\ell}\gamma^\mu (\gamma^5)\ell)$$

Коэффициенты Вильсона

- Коэффициенты Вильсона могут быть вычислены по теории возмущений на масштабе μ_W в следующем виде:

$$C_j(\mu_W) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_s(\mu_W)}{4\pi} \right]^k C_j^{(k)}(\mu_W)$$

$C_1(m_b)$	-0.146	$C_3(m_b)$	0.011	$C_7(m_b)$	4.9×10^{-4}
$C_2(m_b)$	1.056	$C_4(m_b)$	-0.033	$C_8(m_b)$	4.6×10^{-4}
$C_{7\gamma}(m_b)$	-0.317	$C_5(m_b)$	0.010	$C_9(m_b)$	-9.8×10^{-3}
$C_{8g}(m_b)$	0.149	$C_6(m_b)$	-0.039	$C_{10}(m_b)$	1.9×10^{-3}

Численные значения параметров, используемые в расчетах

$G_F = 1.16638 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ $\alpha_{em}^{-1}(m_b) = 133$ $\alpha_s(m_{bpole}) = 0.2171 \pm 0.0009$ $\alpha_s(M_W) = 0.1208 \pm 0.0006$ $\alpha_s(m_t) = 0.1079 \pm 0.0004$ $m_Z = 91.1876 \text{ GeV}$ $m_W = 80.385 \text{ GeV}$ $m_e = 0.511 \times 10^{-3} \text{ GeV}$ $m_\mu = 0.1056 \text{ GeV}$ $\omega_0(m_{bpole}) = 0.33 \pm 0.04$	$m_b(m_b) = (4.18 \pm 0.03) \text{ GeV}$ $m_b(1S) = (4.65 \pm 0.03) \text{ GeV}$ $m_{bpole} = (4.78 \pm 0.06) \text{ GeV}$ $m_t = (172.76 \pm 0.30) \text{ GeV}$ $m_{B^+} = 5.27934 \text{ GeV}$ $m_{B^0} = 5.27965 \text{ GeV}$ $m_\phi = 1.01946 \text{ GeV}$ $\tau_{B^0} = (1.519 \pm 0.004) \text{ ps}$ $f_\phi = (0.241 \pm 0.009) \text{ GeV}$ $f_B = (0.186 \pm 0.004) \text{ GeV}$
Wolfenstein parameters: $\lambda = 0.22650 \pm 0.00048$ $A = 0.790^{+0.017}_{-0.012}$ $\bar{\rho} = 0.141^{+0.016}_{-0.017}$ $\bar{\eta} = 0.357 \pm 0.011$	CKM matrix elements: $ V_{ud} = 0.97370 \pm 0.00014$ $ V_{tb} = 1.013 \pm 0.030$ $ V_{ub} = (3.82 \pm 0.24) \times 10^{-3}$ $ V_{td} = (8.54 \pm 0.30) \times 10^{-3}$

Амплитуды распределения тяжелого мезона

- Матричный элемент перехода из мезонного состояния в вакуумное при $z^2 = 0$ (легкий кварк на световом конусе) [Grozin & Neubert (1996); Beneke & Feldmann (2001)]

$$\langle 0 | q_\alpha(z) E(0, z) h_{v,\beta}(0) | \bar{B}(v) \rangle = -\frac{if_B m_B}{4} \times \left[(1 + \hat{v}) \left\{ \tilde{\varphi}_+^B(t) - [\tilde{\varphi}_+^B(t) - \tilde{\varphi}_-^B(t)] \frac{\hat{z}}{2t} \right\} \gamma_5 \right]_{\beta\alpha}$$

- $t = (vz)$ – собственное время в системе покоя тяжелого мезона; $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ – 4-скорость
- $\tilde{\varphi}_\pm^B(t)$ – амплитуды распределения тяжелого мезона
- При построении матричного элемента распада необходимо использовать преобразование Фурье:

$$\tilde{\varphi}_\pm^B(t) = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} \phi_\pm^B(\omega)$$

Моменты амплитуд распределения

- Первые обратные моменты (простой и логарифмический):

$$\lambda_B^{-1}(\mu) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \phi_+^B(\omega; \mu), \quad \frac{\sigma_{B,n}(\mu)}{\lambda_B(\mu)} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \phi_+^B(\omega; \mu) \ln^n \frac{\mu}{\omega}$$

- Амплитуда распада пропорциональна q^2 -зависимым первым обратным моментам:

$$\lambda_{B,\pm}^{-1}(q^2) = \int_0^\infty \frac{\phi_\pm^B(\omega) d\omega}{\omega - q^2/M_B - i\epsilon}$$

- Используются экспоненциальная (GN) и линейная (KKQT) модели амплитуд распределения

$$\lambda_{B,+}^{-1}(q^2) = \lambda_B^{-1} + \zeta \lambda_{B,-}(q^2), \quad \lambda_{B,-}^{-1}(q^2) = \lambda_B^{-1} e^{-\zeta} [-\text{Ei}(\zeta) + i\pi]$$

$$\lambda_{B,+}^{-1}(q^2) = \lambda_B^{-1} [\xi \ln |1/\xi - 1| + 1 + i\pi \xi \Theta(1 - \xi)],$$

$$\lambda_{B,-}^{-1}(q^2) = \lambda_B^{-1} [(1 - \xi) \ln |1/\xi - 1| - 1 + i\pi (1 - \xi) \Theta(1 - \xi)]$$

- $\zeta = q^2/(m_B \lambda_B)$, $\xi = q^2/(2m_B \lambda_B)$ – безразмерный квадрат импульса

Матричные элементы перехода $B \rightarrow P$

$$\langle P(k) | \bar{p} \gamma^\mu b | B(p_B) \rangle = f_+(q^2) \left[p_B^\mu + k^\mu - \frac{m_B^2 - m_P^2}{q^2} q^\mu \right] + f_0(q^2) \frac{m_B^2 - m_P^2}{q^2} q^\mu$$

$$\langle P(k) | \bar{p} \gamma^\mu \gamma_5 b | B(p_B) \rangle = 0$$

$$\langle P(k) | \bar{p} \sigma^{\mu\nu} q_\nu b | B(p_B) \rangle = i \left[(p_B^\mu + k^\mu) q^2 - q^\mu (m_B^2 - m_P^2) \right] \frac{f_T(q^2)}{m_B + m_P}$$

$$\langle P(k) | \bar{p} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 q_\nu b | B(p_B) \rangle = 0$$

- $q^\mu = p_B^\mu - k^\mu$ — передаваемый импульс
- $f_+(q^2)$, $f_0(q^2)$, $f_T(q^2)$ — соответствующие формфакторы переходов

Эффективные Вильсоновские коэффициенты

- Вероятности распадов B -мезонов, идущих за счет $b \rightarrow s\ell^{-}\ell^{+}$ и $b \rightarrow d\ell^{-}\ell^{+}$ переходов, записывают в терминах эффективных вильсоновских коэффициентов C_7^{eff} , C_9^{eff} и C_{10}^{eff}
- Известны в следующем за главным порядке теории возмущений [H. Asatrian et al., PRD 69 (2004) 074007]

$$C_7^{\text{eff}} = \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \omega_7(\hat{s}) \right] A_7 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[C_1^{(0)} F_{1,c}^{(7)} + C_2^{(0)} F_{2,c}^{(7)} + \sum_{k=3}^6 C_k^{(0)} F_k^{(7)} + A_8^{(0)} F_8^{(7)} \right] - \frac{\alpha_s}{4\pi} \xi^{(q)} \left\{ C_1^{(0)} [F_{1,c}^{(7)} - F_{1,u}^{(7)}] + C_2^{(0)} [F_{2,c}^{(7)} - F_{2,u}^{(7)}] \right\}$$

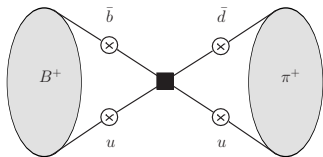
$$C_9^{\text{eff}} = \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \omega_9(\hat{s}) \right] \left\{ A_9 + T_9 h(\hat{m}_c^2, \hat{s}) + U_9 h(1, \hat{s}) + W_9 h(0, \hat{s}) + \xi^{(s)} T_{9a} \times \right. \\ \left. \times [h(\hat{m}_c^2, \hat{s}) - h(0, \hat{s})] \right\} - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[C_1^{(0)} F_{1,c}^{(9)} + C_2^{(0)} F_{2,c}^{(9)} + \sum_{k=3}^6 C_k^{(0)} F_k^{(9)} + A_8^{(0)} F_8^{(9)} \right] - \frac{\alpha_s}{4\pi} \xi^{(q)} \left\{ C_1^{(0)} [F_{1,c}^{(9)} - F_{1,u}^{(9)}] + C_2^{(0)} [F_{2,c}^{(9)} - F_{2,u}^{(9)}] \right\}$$

$$C_{10}^{\text{eff}} = \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \omega_{10}(\hat{s}) \right] A_{10}$$

- $\hat{m}_c = m_c/m_b$; $\xi^{(q)} = \lambda_u^{(q)}/\lambda_t^{(q)}$ ($q = d, s$)
- $\hat{s} = q^2/m_b^2$ — квадрат 4-импульса лептонной пары, нормированный на квадрат массы b -кварка

Аннигиляционный вклад (WA) в распад $B^+ \rightarrow \pi^+ \ell^+ \ell^-$

Может быть получен в рамках LEET [Eur.Phys.J.C41:173-188 2005]



$$L_A^{B\pi(t)}(q^2) = Q_q \frac{\pi^2}{3} \frac{4f_B f_\pi}{m_b} \lambda_{B,-}^{-1}(q^2) C_{34}$$

$$L_A^{B\pi(u)}(q^2) = -Q_q \frac{\pi^2}{3} \frac{4f_B f_\pi}{m_b} \lambda_{B,-}^{-1}(q^2) C_{12}$$

- Q_q — заряд спектаторного кварка
- f_B и f_π — константы распада B - и π -мезонов
- $C_{34} = C_3 + \frac{4}{3}(C_4 + 12C_5 + 16C_6)$; $C_{12} = 3C_2$ — комбинации из коэффициентов Вильсона
- Вклады зависят от первого обратного момента B -мезона:

$$\lambda_{B,-}^{-1}(q^2) = \frac{e^{-q^2/(m_B \omega_0)}}{\omega_0} [i\pi - Ei(q^2/(m_B \omega_0))]$$

$Ei(z) = \int_z^{-\infty} dt e^t/t$ — интегральная показательная функция

Вклады больших расстояний (LDC)

- Вклады от $B \rightarrow V(\rightarrow \bar{\ell}\ell)\pi$ распадов нейтральных мезонов, где $V = \rho^0, \omega, J/\psi, \psi(2S)$
- LDC для $B \rightarrow \pi\ell^+\ell^-$ представимо в виде:
[Hambrock et al., PRD 92 (2015) 074020]

$$\Delta C_V^{B\pi}(q^2) = -16\pi^2 \frac{V_{ub}V_{ud}^* H^{(u)}(q^2) + V_{cb}V_{cd}^* H^{(c)}(q^2)}{V_{tb}V_{td}^*}$$

$$H^{(p)}(q^2) = (q^2 - q_0^2) \sum_V \frac{k_V f_V A_{BV\pi}^p}{(m_V^2 - q_0^2)(m_V^2 - q^2 - im_V \Gamma_V^{\text{tot}})}$$

- k_V – коэффициент валентного кварка, f_V – постоянная распада, $A_{BV\pi}^p$ ($p = u, c$) – амплитуды перехода, Γ_V^{tot} – полная ширина векторного мезона, $q_0^2 = -1.0 \text{ GeV}^2$
- Вклады от ρ^0 - и ω -мезонов с массами $m_{\rho^0} = 775.25 \text{ MeV}$ и $m_\omega = 782.66 \text{ MeV}$ вместе с вкладом WA диаграмм позволяют объяснить экспериментальный пик в области малых q^2 для $B^+ \rightarrow \pi^+\mu^+\mu^-$ спектра

Численные значения параметров, входящих в LDC

- Коэффициенты валентного кварка:

$$k_\rho = 1/\sqrt{2}, k_\omega = 1/(3\sqrt{2}), k_{J/\psi} = k_{\psi(2S)} = 2/3$$

- Массы векторных мезонов:

$$m_\rho^0 = 775.25 \text{ MeV}, m_\omega = 782.66 \text{ MeV}, m_{J/\psi} = 3.0969 \text{ GeV},$$

$$m_{\psi(2S)} = 3.6861 \text{ GeV}$$

- Константы распада:

$$f_\rho = 221 \text{ MeV}, f_\omega = 195 \text{ MeV}, f_{J/\psi} = 416 \text{ MeV}, f_{\psi(2S)} = 297 \text{ MeV}$$

$B \rightarrow V\pi$ амплитуды: $A_{BV\pi}^p = |A_{BV\pi}^p| e^{i\delta_{BV\pi}^{(p)}}$

Полная ширина мезона

Mode	$ A_{BV\pi}^u $	$ A_{BV\pi}^c $
$B^\mp \rightarrow \rho^0 \pi^\mp$	$20.8^{+2.7}_{-2.3}$	$1.3^{+1.1}_{-0.4}$
$B^\mp \rightarrow \omega \pi^\mp$	$19.1^{+2.7}_{-2.0}$	$0.3^{+0.4}_{-0.1}$
$B^\mp \rightarrow J/\psi \pi^\mp$	$0.5^{+9.7}_{-0.5}$	$29.2^{+1.4}_{-1.5}$
$B^\mp \rightarrow \psi(2S) \pi^\mp$	$3.5^{+6.7}_{-3.5}$	$32.3^{+2.0}_{-2.1}$

	Γ_V^{tot}
ρ^0	$147.4 \pm 0.8 \text{ MeV}$
ω	$8.68 \pm 0.13 \text{ MeV}$
J/ψ	$92.6 \pm 1.7 \text{ keV}$
$\psi(2S)$	$294 \pm 8 \text{ keV}$

Параметризации формфакторов

- Параметризация Бойда-Гринштейна-Лебеда (БГЛ)
($i = +, 0, T$)

$$f_i(q^2) = \frac{1}{P_i(q^2)\phi_i(q^2, q_0^2)} \sum_{k=0}^N a_k^{(i)} [z(q^2, q_0^2)]^k,$$

$$z(q^2, q_0^2) = \frac{\sqrt{m_+^2 - q^2} - \sqrt{m_+^2 - q_0^2}}{\sqrt{m_+^2 - q^2} + \sqrt{m_+^2 - q_0^2}},$$

$$m_+ = m_B + m_\pi, \quad q_0^2 = 0.65(m_B - m_\pi)^2$$

- Фактор Блашке: $P_{i=+,T}(q^2) = z(q^2, m_{B^*}^2)$ и $P_0(q^2) = 1$
- $\phi_i(q^2, q_0^2)$ — внешняя функция, зависящая от изоспина и трех параметров K_i , α_i , и β_i
- Параметризация Борреля-Каприни-Леллоша (БКЛ)
- Модифицированная БКЛ параметризация (мБКЛ)

Параметризации формфакторов

- Параметризация Бойда-Гринштейна-Лебеда (БГЛ)
- Параметризация Борреля-Каприни-Леллоша (БКЛ)
($i = +, T$)

$$f_i(q^2) = \frac{1}{1 - q^2/m_{B^*}^2} \sum_{k=0}^{N-1} b_k^{(i)} \left([z(q^2, q_0^2)]^k - (-1)^{k-N} \frac{k}{N} [z(q^2, q_0^2)]^N \right)$$

$$f_0(q^2) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k^{(0)} z(q^2, q_0^2)^k$$

$$m_+ = m_B + m_\pi, \quad q_0^2 = m_+(\sqrt{m_B} - \sqrt{m_\pi})^2$$

Разложение для формфакторов берется вплоть до $N = 4$

- Модифицированная БКЛ параметризация (мБКЛ)

Параметризации формфакторов

- Параметризация Бойда-Гринштейна-Лебеда (БГЛ)
- Параметризация Борреля-Каприни-Леллоша (БКЛ)
- Модифицированная БКЛ параметризация (мБКЛ)
($i = +, T$)

$$f_i(q^2) = \frac{f_i(q^2 = 0)}{1 - q^2/m_{B^*}^2} \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} b_k^{(i)} \left(\bar{z}_k(q^2, q_0^2) - (-1)^{k-N} \frac{k}{N} \bar{z}_N(q^2, q_0^2) \right) \right]$$

$$f_0(q^2) = \frac{f_+(q^2 = 0)}{1 - q^2/m_{B_0}^2} \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k^{(0)} \bar{z}_k(q^2, q_0^2) \right]$$

- $\bar{z}_n(q^2, q_0^2) = z^n(q^2, q_0^2) - z^n(0, q_0^2)$
- q_0^2 выбрано как оптимальное значение
- FF $f_0(q^2)$ имеет полюс в квадрате массы B_0 -мезона

Прогнозы по улучшению чувствительности детектора на Belle II

[Snowmass Whitepaper: The Belle II Detector Upgrade Program]

Observable	2022 Belle(II), BaBar	Belle-II 5 ab ⁻¹	Belle-II 50 ab ⁻¹	Belle-II 250 ab ⁻¹
$\sin 2\beta/\phi_1$	0.03	0.012	0.005	0.002
γ/ϕ_3 (Belle+BelleII)	11°	4.7°	1.5°	0.8°
α/ϕ_2 (WA)	4°	2°	0.6°	0.3°
$ V_{ub} $ (Exclusive)	4.5%	2%	1%	< 1%
$SCP(B \rightarrow \eta' K_S^0)$	0.08	0.03	0.015	0.007
$ACP(B \rightarrow \pi^0 K_S^0)$	0.15	0.07	0.025	0.018
$SCP(B \rightarrow K^{*0} \gamma)$	0.32	0.11	0.035	0.015
$R(B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-)^{\dagger}$	0.26	0.09	0.03	0.01
$R(B \rightarrow D^* \tau \nu)$	0.018	0.009	0.0045	< 0.003
$R(B \rightarrow D \tau \nu)$	0.034	0.016	0.008	< 0.003
$B(B \rightarrow \tau \nu)$	24%	9%	4%	2%
$B(B \rightarrow K^* \nu \bar{\nu})$	—	25%	9%	4%
$B(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ UL	42×10^{-9}	22×10^{-9}	6.9×10^{-9}	3.1×10^{-9}
$B(\tau \rightarrow \mu \mu \mu)$ UL	21×10^{-9}	3.6×10^{-9}	0.36×10^{-9}	0.073×10^{-9}

- Интегральную светимость в $\sim 5 \text{ абн}^{-1}$ планируется достичь к 2026 году
- Дальнейшее повышение вплоть до 50 абн^{-1} ожидается после 2030 года