Однопетлевые диаграммы и угловые интегралы в КХД

Летняя научная школа "Супер с-тау фабрика"

Ю.А. Аникин

Научный руководитель: В.Е. Любовицкий

Национальный исследовательский Томский государственный университет

26.07.22

Введение

- Для проверки Стандартной модели и поисков новой физики большое значение имеет развитие методов, позволяющих точно вычислять наблюдаемые для дальнейшего сравнения с экспериментальными данными.
- Ключевым элементом такого рода вычислений является Лоренц–инвариантный интеграл по фазовому пространству:

$$I_n = \int \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^{D-1} k_i}{(2\pi)^{D-1} 2E_i} \right) (2\pi)^D \delta^D (p_a + p_b - P_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2,$$

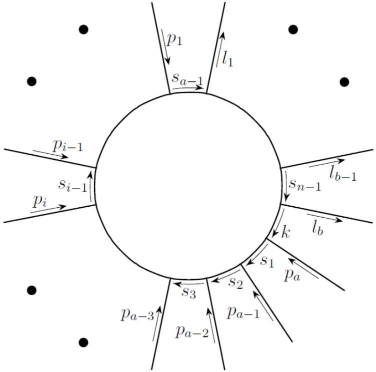
- Можно выделить два блока:
  1. **Однопетлевые диаграммы**
     - Метод Пассарино–Вельтмана
     - Метод разложения по ортогональному базису
  2. **Угловые интегралы**
     - Классификация мастер–интегралов
     - Аналитическое вычисление мастер–интегралов

Часть I

Однопетлевые диаграммы

Однопетлевой интеграл в общем случае

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{i_1\ldots i_n}[f(k)] &= \left(i\pi^2\right)^{-1}\mu^{4-D}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{f(k)}{\left(k^2-m_0^2\right)\left(s_1^2-m_1^2\right)\ldots\left(s_{n-1}^2-m_{n-1}^2\right)} = \\
&= \left(i\pi^2\right)^{-1}\mu^{4-D}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{k^{\alpha_1}\ldots k^{\alpha_m}}{\Delta_{i_1}\ldots\Delta_{i_n}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$



Метод Пассарино–Вельтмана

Общая формула:

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{i_1\ldots i_n} = \frac{1}{m!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{p_{\beta_1}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}T^n_{\beta_1\ldots\beta_m}+ \\
+\frac{1}{(m-2)!}\sum_{\beta_3,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{gp_{\beta_3}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}T^n_{00\beta_3\ldots\beta_m}+ \\
+\frac{1}{(m-4)!}\sum_{\beta_5,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{ggp_{\beta_5}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}T^n_{0000\beta_5\ldots\beta_m}+\ldots+ \\
+\begin{cases}\displaystyle\sum_{\beta_m=1}^{n-1}\{g\ldots gp_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}T^n_{\underbrace{0\ldots0}_{m-1}\beta_m}, & \text{для нечетных m,}\\ \{g\ldots g\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}T^n_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}, & \text{для четных m,}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Метод Пассарино–Вельтмана

Общая формула:

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{i_1\ldots i_n} &= \frac{1}{m!}\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{p_{\beta_1}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} T^n_{\beta_1\ldots\beta_m} + \\
&+ \frac{1}{(m-2)!}\sum_{\beta_3,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{g p_{\beta_3}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m} T^n_{00\beta_3\ldots\beta_m} + \\
&+ \frac{1}{(m-4)!}\sum_{\beta_5,\ldots,\beta_m=1}^{n-1}\{gg p_{\beta_5}\ldots p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m} T^n_{0000\beta_5\ldots\beta_m} + \ldots + \\
&+ \begin{cases} \sum\limits_{\beta_m=1}^{n-1}\{g\ldots g p_{\beta_m}\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m} {T^n}_{\underbrace{0\ldots0}_{m-1}\beta_m}, & \text{для нечетных m,} \\ \{g\ldots g\}^{\alpha_1\ldots\alpha_m} {T^n}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}, & \text{для четных m,} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Метод разложения по ортогональному базису

Можем осуществить разложение по специальным линейным комбинациям внешних импульсов:

$$
\begin{aligned}
P_1^\mu &= (p_1 + p_2)^\mu, \\
P_2^\mu &= (p_1 - p_2)^\mu, \\
P_3^\mu &= k_1^\mu - P_1^\mu \frac{P_1 \cdot k_1}{P_1^2} - P_2^\mu \frac{P_2 \cdot k_1}{P_2^2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_{n-1}^\mu &= k_1^\mu - P_1^\mu \frac{P_1 \cdot k_{n-1}}{P_1^2} - P_2^\mu \frac{P_2 \cdot k_{n-1}}{P_2^2} - \ldots - P_n^\mu \frac{P_n \cdot k_{n-1}}{P_n^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Кроме того определим поперечный метрический тензор:

$$
g_{\perp;n}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i^\mu P_i^\nu}{P_i^2}, \tag{4}
$$

Метод разложения по ортогональному базису

Базисные векторы и поперечный метрический тензор удовлетворяют условиям:

$$
\begin{aligned}
&P_i \cdot P_j = 0, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \\
&g_{\perp;n}^{\mu\nu} P_{i;\mu} = 0, \; i = \overline{1, n-1}, \\
&g_{\perp;n}^{\mu\nu} g_{\perp;n;\mu\nu} = D + n - 1,
\end{aligned} \tag{5}
$$

Скалярные функции фиксируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&T_{1\ldots m}^{n} = \frac{P_{1;\alpha_1} \ldots P_{m;\alpha_m}}{P_1^2 \ldots P_m^2} I_{i_1\ldots i_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}, \\
&T_{003\ldots m}^{n} = \frac{g_{\perp;\alpha_1\alpha_2} P_{3;\alpha_3} \ldots P_{m;\alpha_m}}{(D + n - 1) P_3^2 \ldots P_m^2} I_{i_1\ldots i_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6}
$$

Часть II

Угловые интегралы

Интеграл по фазовому пространству

Лоренц–инвариантный интеграл по фазовому пространству с использованием размерной регуляризации $D = 4 - 2\varepsilon$:

$$\int \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^{D-1} k_i}{(2\pi)^{D-1} 2E_i} \right) (2\pi)^D \delta^D (p_a + p_b - P_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{7}$$

Можно свести к вычислению:

$$\begin{aligned} I_{2,P} &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{(4\pi)^2 \Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta_1 \sin^{1-2\varepsilon}(\theta_1) \int_0^\pi \mathrm{d}\theta_2 \sin^{-2\varepsilon}(\theta_2) = \\ &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{(4\pi)^2 \Gamma(1-2\varepsilon)} \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} f(\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Полученный интеграл допускает дальнейшее упрощение, путем разложения подынтегрально выражения на простейшие и, как следствие, сводится к вычислению так называемых мастер–интегралов.

Интеграл без пропагатора

Определение:

$$I^{(0)}(\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \,. \tag{9}$$

Осуществляя замену:

$$t_i = \frac{1 - \cos(\theta_i)}{2}. \tag{10}$$

Аналитическое выражение:

$$I^{(0)}(\varepsilon) = 2\pi \frac{\Gamma(1 - 2\varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} = \frac{2\pi}{1 - 2\varepsilon}. \tag{11}$$

Как мы увидим в дальнейшем, данный множитель появляется при вычислении всех оставшихся мастер–интегралов.

Интеграл с одним пропагатором

Определение:

$$I_j(\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1 \cdot k)^j}. \tag{12}$$

Выберем систему координат так, чтобы:

$$k = (1, \ldots, \cos(\theta_2)\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)), \tag{13}$$

$$v_i = (1, \ldots, 0, \beta), \tag{14}$$

Так скалярное произведение приобретает наиболее простой вид:

$$v_1 \cdot k = 1 - \beta\cos(\theta_1). \tag{15}$$

Далее используем замену

$$t_i = \frac{1 - \cos(\theta_i)}{2}. \tag{16}$$

Безмассовый интеграл с одним пропагатором

Определение:

$$I_j^{(0)}(\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1 \cdot k)^j}, \qquad v_{11} = 0. \tag{17}$$

Аналитическое выражение:

$$I_j^{(0)}(\varepsilon) = I^{(0)}(\varepsilon) \frac{(2 - j - 2\varepsilon)_j}{2^j (1 - j - \varepsilon)_j}. \tag{18}$$

Массивный интеграл с одним пропагатором

Определение:

$$I_j^{(1)}(v_{11}; \varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1 \cdot k)^j}, \qquad v_{11} \neq 0. \tag{19}$$

Аналитическое выражение:

$$I_j^{(1)}(v_{11}; \varepsilon) = \frac{I^{(0)}(\varepsilon)}{(1 - \beta)^j} \, {}_2F_1\left(j, 1 - \varepsilon, 2 - 2\varepsilon, -\frac{2\beta}{1 - \beta}\right). \tag{20}$$

Интеграл с двумя пропагаторами

Определение:

$$I_{j,l}(v_{12};\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1 \cdot k)^j (v_2 \cdot k)^l}. \tag{21}$$

Используя параметризацию Фейнмана запишем

$$I_{j,l}(v_{12};\varepsilon) = \frac{\Gamma(j+l)}{\Gamma(j)\Gamma(l)} \int_0^1 \mathrm{d}x_1\, x_1^{j-1} \int_0^1 \mathrm{d}x_2\, x_2^{l-1} \delta(1-x_1-x_2) \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{((x_1 v_1 + x_2 v_2)\cdot k)^{j+l}}. \tag{22}$$

Введем вектор

$$v = (1, \mathbf{v}) := x_1 v_1 + x_2 v_2. \tag{23}$$

И повернем систему координат так, чтобы вектор $\mathbf{v}$ был направлен вдоль оси x_D т.е.

$$v = (1, \mathbf{0}_{D-3}, 0, \beta). \tag{24}$$

Безмассовый интеграл с двумя пропагаторами

Определение:

$$I^{(0)}_{j,l}(v_{12};\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1\cdot k)^j (v_2\cdot k)^l}, \qquad v_{11} = v_{22} = 0. \tag{25}$$

Аналитическое выражение:

$$I^{(0)}_{j,l}(v_{12};\varepsilon) = I^{(0)}_{j+l}(\varepsilon)\frac{(1-j-l-\varepsilon)_j}{(1-j-\varepsilon)_j}\,{}_2F_1\left(j, l, 1-\varepsilon, 1-\frac{v_{12}}{2}\right). \tag{26}$$

Одномассовый интеграл с двумя пропагаторами

Определение:

$$I^{(1)}_{j,l}(v_{12}, v_{11};\varepsilon) := \int \mathrm{d}\Omega_{k_1 k_2} \frac{1}{(v_1\cdot k)^j (v_2\cdot k)^l}, \qquad v_{11} \neq 0; v_{22} = 0. \tag{27}$$

Аналитическое выражение:

$$I^{(1)}_{j,l}(v_{12}, v_{11};\varepsilon) = \frac{I^{(0)}_l(\varepsilon)}{v_{12}^j}\left(\frac{v_{11}}{v_{12}^2}\right)^{l-1+\varepsilon} F_1\left(2-j-l-2\varepsilon, 1-l-\varepsilon, 1-l-\varepsilon, 2-l-2\varepsilon, \frac{\tau_+}{\tau_+-1}, \frac{\tau_-}{\tau_--1}\right). \tag{28}$$

Спасибо за внимание!