

Численная реализация модели лазерного импульса в кильватерном ускорителе

М.С. Дорожкина, И.Ю. Каргаполов, Р.И. Спицын и И.А. Шалимова

Институт ядерной физики имени Г.И. Будкера



Новосибирский государственный университет

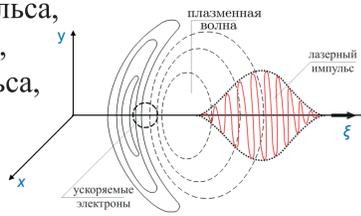
Представлена реализация инструмента для моделирования эволюции лазерного импульса в плазме в двумерной и трёхмерной геометриях. Численный алгоритм разработанного инструмента основан на решении уравнения на огибающую функцию лазерного импульса и использовании квазистатического приближения, которое позволяет значительно уменьшить время моделирования.

Постановка задачи

Все единицы в работе обезразмерены на k_p и ω_p . Эволюция лазерного импульса в случае однородной плазмы тогда описывается уравнением на его огибающую:

$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial \xi} + \Delta_{x,y} A = \alpha A$$

где A – вектор-потенциал лазерного импульса, α – зависит от параметров плазмы и A , k_0 – волновое число лазерного импульса, $\xi = z - ct$ – продольная координата, x, y – поперечные координаты, t – время.



Необходимо реализовать численное решение уравнения огибающей лазерного импульса в случае однородной плазмы ($\alpha=1$) для 2D и 3D геометрий.

Задача решается в счетном окне, движущемся со скоростью света.



Алгоритм решения в 2D

$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial \xi} + \Delta_x A = A$$

Аппроксимируем производные разностными схемами:

• производная по времени:

$$\frac{\partial A(t_m, \xi_n, x_l)}{\partial t} = \frac{A_{n,l}^{m+1} - A_{n,l}^m}{\tau}$$

• в движущемся со скоростью света окне последующая точка не должна влиять на предыдущую по принципу причинности, поэтому используем противопотоковую схему по продольной координате:

$$\frac{\partial A(t_m, \xi_n, x_l)}{\partial \xi} = \frac{-3A_{n,l}^m + 4A_{n-1,l}^m - A_{n-2,l}^m}{2h}$$

• вторая производная по пространству на полушаге по времени:

$$\frac{\partial^2 A(t_m, \xi_n, x_l)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{A_{n,l-1}^m - 2A_{n,l}^m + A_{n,l+1}^m}{g^2} + \frac{1}{2} \frac{A_{n,l-1}^{m+1} - 2A_{n,l}^{m+1} + A_{n,l+1}^{m+1}}{g^2}$$

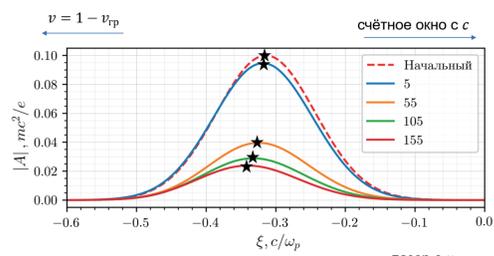
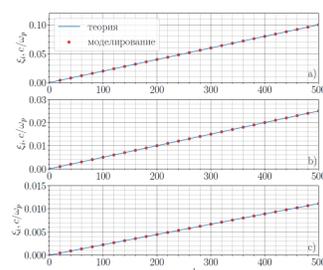
Такая задача сводится к решению трехдиагональной матрицы методом матричной прогонки.

Тестирование кода

Из дисперсионного соотношения для электромагнитной волны в плазме определяется групповая скорость, с которой будет двигаться электромагнитная волна:

$$v_{gr} = \frac{d}{dk_0} \sqrt{k_0^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2}}}$$

Мы следим за центром лазерного импульса.

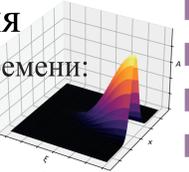


Согласие теории с аналитикой проиллюстрировано для 2D кода, аналогичная картина получается и для 3D алгоритма.

Начальные и граничные условия

Гауссовский вектор-потенциал в начальный момент времени:

$$A(t=0) = A_0 \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{\sigma_\xi^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2}\right)$$



Задача решается в масштабах $x \in [-L_x, L_x]$, $y \in [-L_y, L_y]$, $\xi \in [-L_\xi, 0]$. Выбраны отражающие граничные условия:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=-L_x, L_x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=-L_y, L_y} = 0.$$

Выдвигаемые требования

1. Устойчивость численного решения
2. Минимальная трудоёмкость алгоритма
3. Хорошая читаемость кода и визуализация

Метод решения

По времени и пространству с использованием разностных схем решается уравнение на огибающую лазерного импульса по схеме Кранка-Николсона, что даёт второй порядок по времени и пространству, по ξ используется трехточечная схема, которая также даёт второй порядок.

Алгоритм решения в 3D

$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial \xi} + \Delta_{x,y} A = A$$

Правая разностная схема по времени: $\frac{\partial A(t_m, \xi_n, x_l, y_k)}{\partial t} = \frac{A_{n,l,k}^{m+1} - A_{n,l,k}^m}{\tau}$

Односторонняя производная по ξ :

$$\frac{\partial A(t_m, \xi_n, x_l, y_k)}{\partial \xi} = \frac{-3A_{n,l,k}^m + 4A_{n-1,l,k}^m - A_{n-2,l,k}^m}{2h_\xi}$$

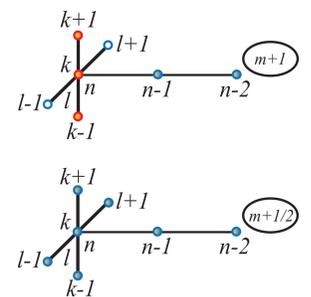
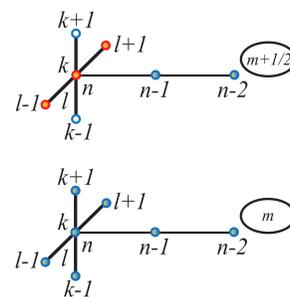
Оператор Лапласа для трехмерной задачи имеет уже две независимые компоненты: x и y . Он расщепляется на два независимых оператора:

$$\Delta_{x,y} A = \Lambda_x A + \Lambda_y A$$

$$\Lambda_x A(\xi_n, x_l, y_k, t^m) = \frac{A_{n,l-1,k}^m - 2A_{n,l,k}^m + A_{n,l+1,k}^m}{h_x^2} \quad \Lambda_y A(\xi_n, x_l, y_k, t^m) = \frac{A_{n,l,k-1}^m - 2A_{n,l,k}^m + A_{n,l,k+1}^m}{h_y^2}$$

Будем решать в два этапа:

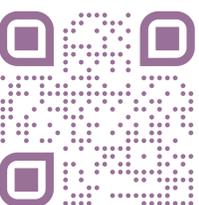
- 1) с неявной схемой по x и явной по y ,
- 2) с явной схемой по x и неявной по y



Выводы

- Реализован алгоритм численного решения уравнения эволюции огибающей лазерного импульса в однородной плазме на языке Python.
- Получено согласие между результатами численного моделирования движения лазерного импульса в однородной плазме и теоретическими расчетами.

Как нас найти



<https://lcode.info/>