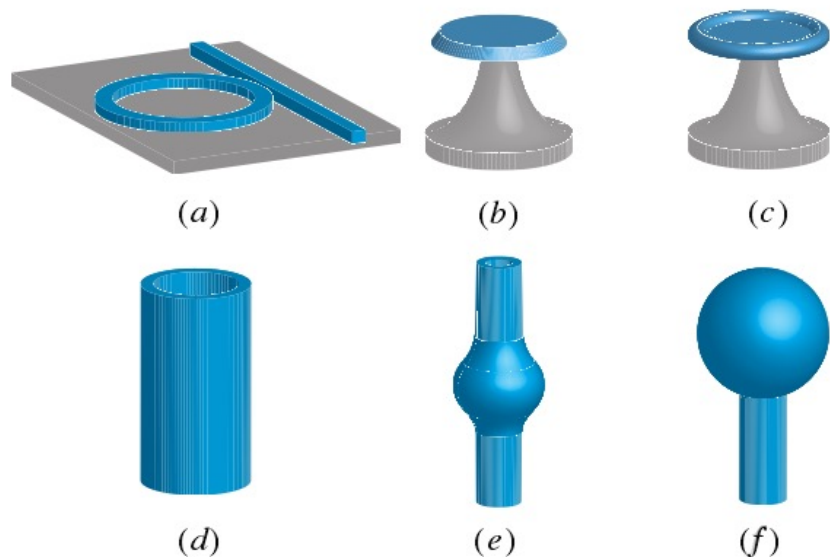


Нелинейная динамика мод шепчущей галереи цилиндрического микрорезонатора с вариацией радиуса

н.с. ЛВЛ НГУ, к.ф.-м.н., Колесникова А. Ю.

Оптические микрорезонаторы



Высокая добротность
Малый объем



Наблюдается нелинейность
Керра

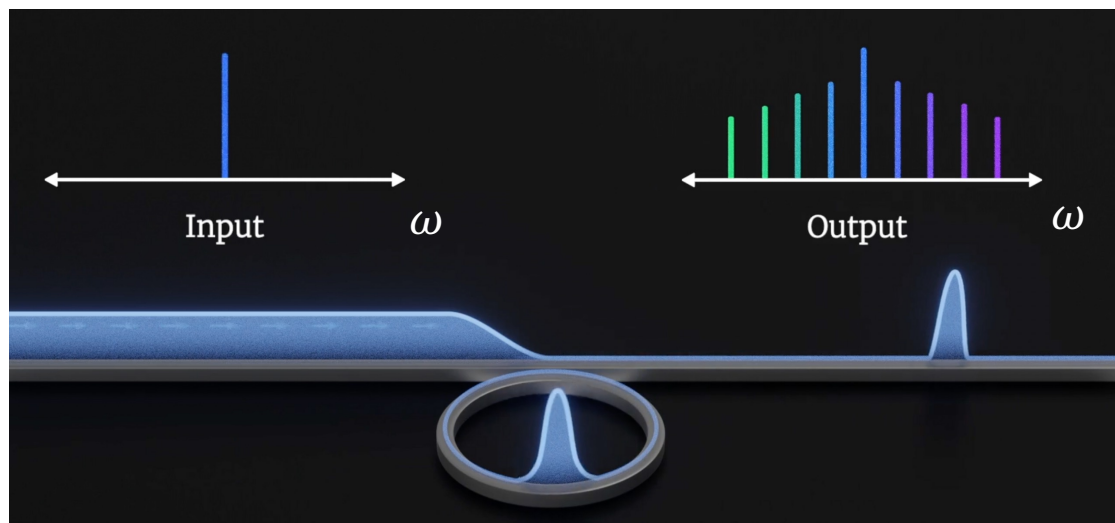
$$P_{nl} \sim \chi_3 |E|^2 E$$

Равноудаленные частоты

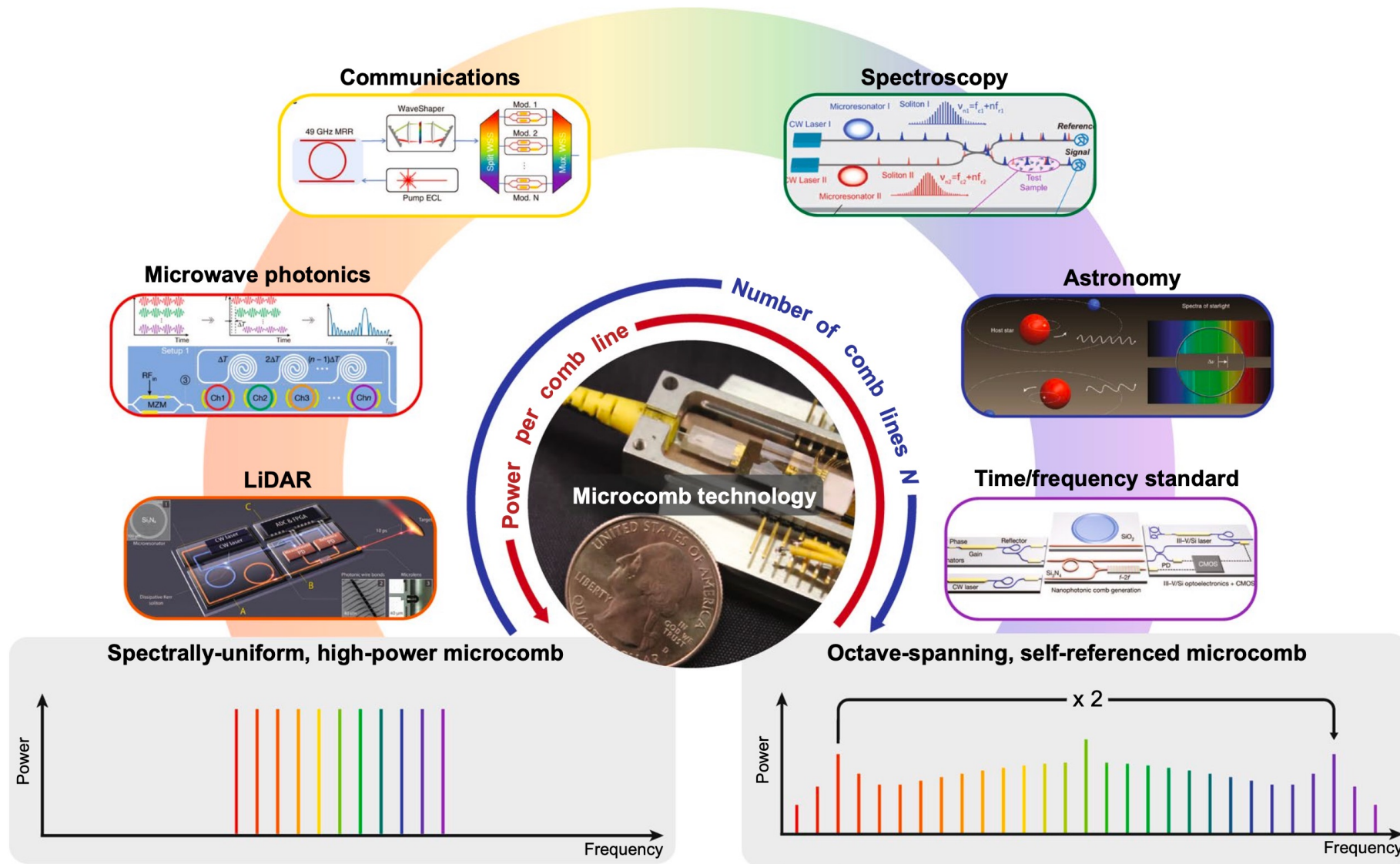
$$\lambda_m \sim \frac{2\pi R n}{m}, \quad \omega_m \sim \frac{c m}{R n}$$



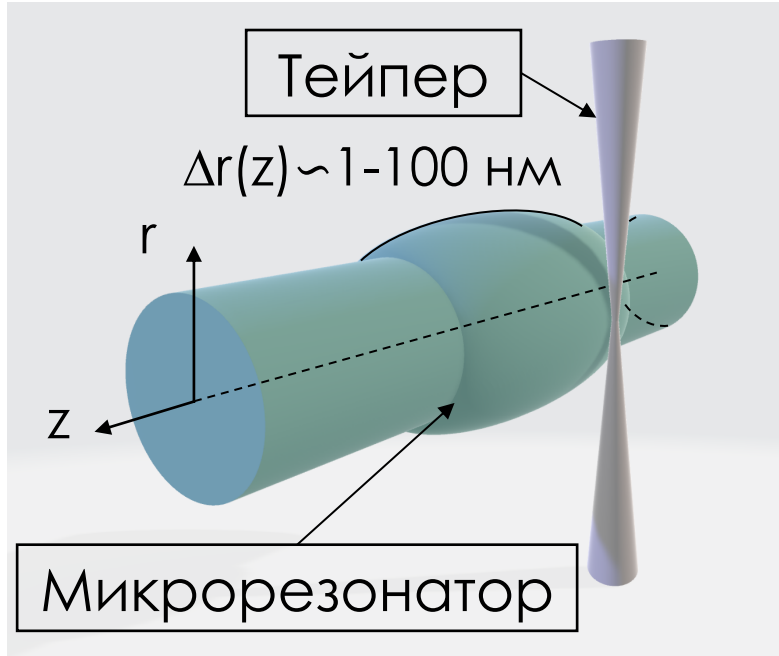
Оптическая частотная
гребенка



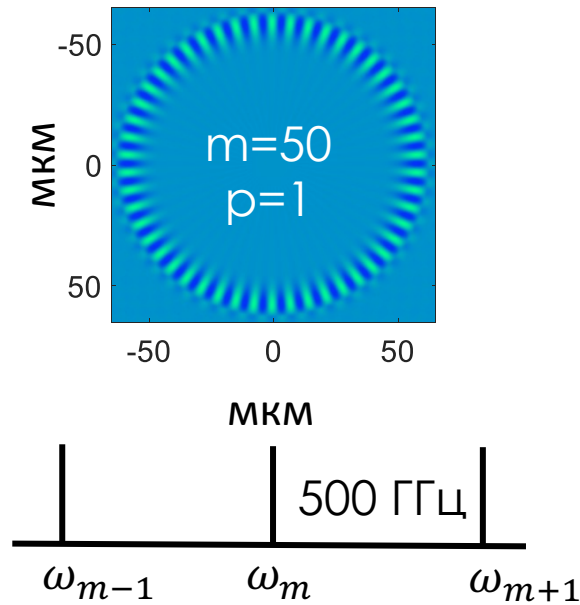
Применение оптических частотных гребенок



SNAP микрорезонаторы (Surface Nanoscale Axial Photonics)

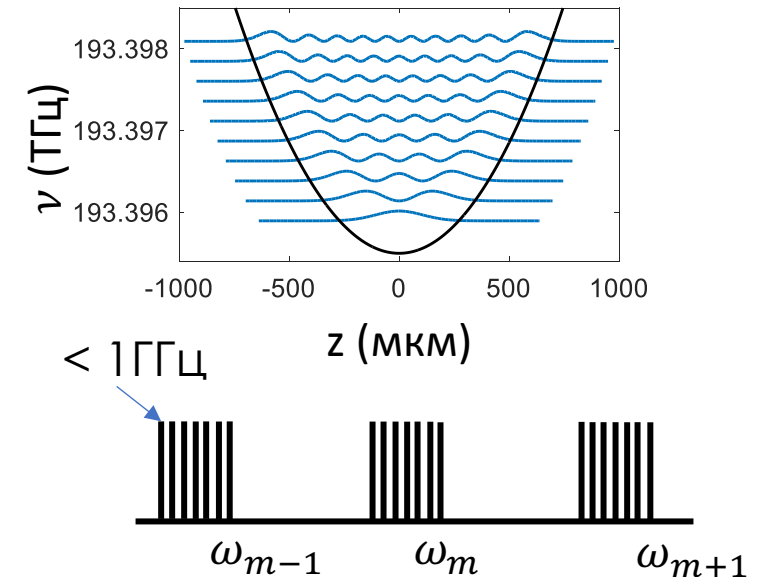


Азимутально-радиальное
распределение моды



1. Бегущие моды
2. Одинаковые объемы для разных m
3. Сила связи с тейпером не зависит от точки контакта
4. Изменение волнового вектора с изменением m значительно

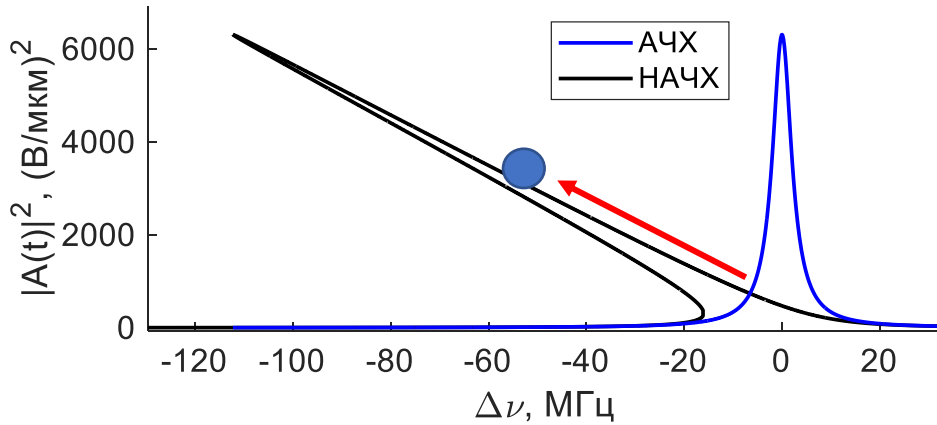
Аксиальное
распределение моды
 $q=0..9$



1. Стоячие моды
2. Разные объемы для разных q
3. Сила связи с тейпером зависит от точки контакта
4. Изменение волнового вектора с изменением q незначительно

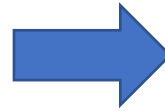
Как возникает солитон (оптическая частотная гребенка)?

Нелинейность = сдвиг резонанса



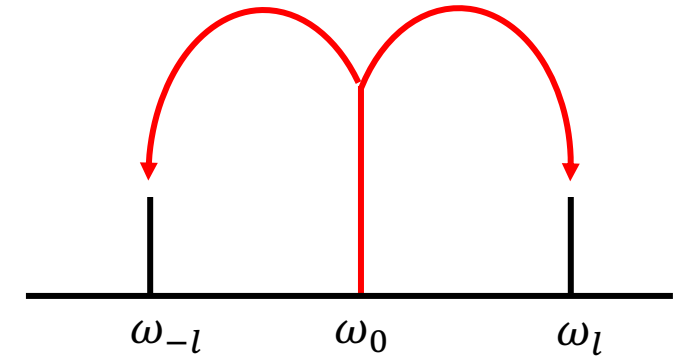
Сканируем частоту до точки

$$2\omega_0 = \omega_l + \omega_{-l}$$

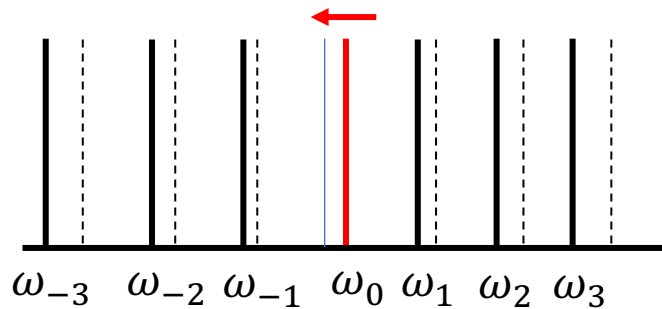


Эффективная перекачка
энергии в боковые моды

В спектре появляется первичная ОЧГ

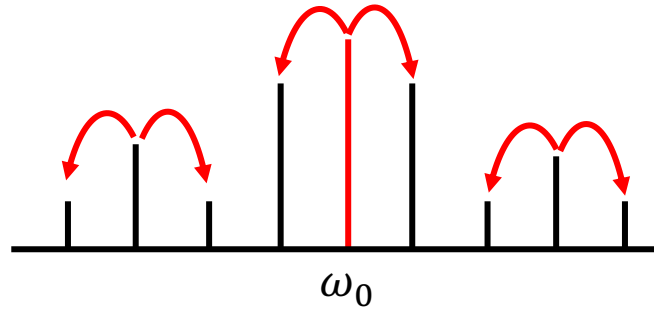


Модовая дисперсия

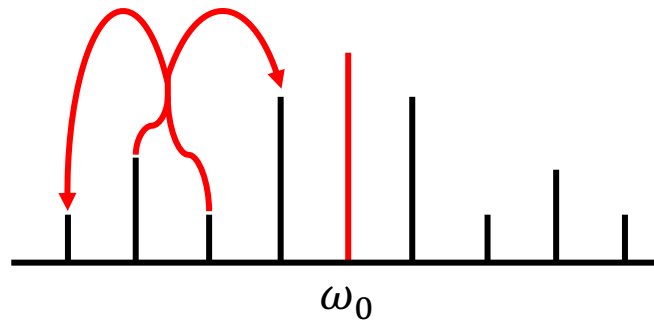


Как возникает солитон (оптическая частотная гребенка)?

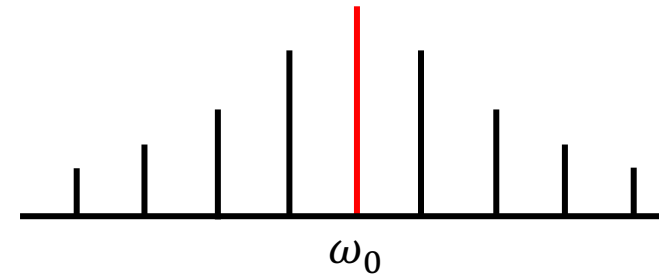
Вырожденное четырехволновое
взаимодействие



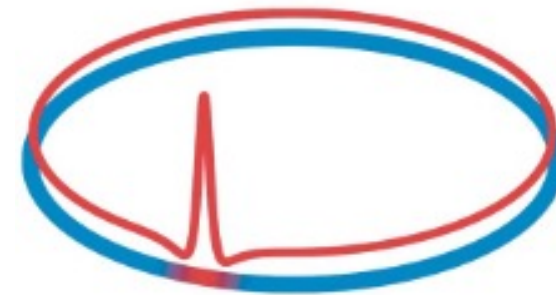
Четырехволновое
взаимодействие



Эквидистантные линии в гребенке



Солитон в кольцевом микрорезонаторе



Разработанная модель нелинейной динамики

$$E(\vec{r}, t) = \sum_{m,p} A_{m,p}(z, t) \exp(i\omega_{m,p}t) e_{m,p}(r, \varphi) + c.c. \quad - \text{поле мод шепчущей галереи}$$

$$e_{m,p}(r, \varphi) = Ai(-(2m^2)^{1/3}(r-r_0)/r_0 + \alpha_p) e^{im\varphi}$$

m - азимутальное число

p - радиальное число

Нелинейное уравнение Шредингера с потенциалом и модовыми селективными потерями:

$$i \frac{\partial A_m}{\partial t} - \frac{\omega_m}{2\beta_m^2 K_m} \frac{\partial^2 A_m}{\partial z^2} - \frac{\omega_m}{K_m} \frac{\Delta r_{eff}(z)}{r_0} A_m + i\Gamma A_m - \frac{3\omega_m \chi^{(3)}}{K_m 2n_m^2 S_m^{(eff)}} F_m(\vec{A}) + D_m f_p(z) A_m = C_m f_p(z) e^{i\Delta\omega_p t}$$

Дифракция

Потенциал

**Собственные
потери**

Нелинейность

**Потери на
тейпере**

Источник

$$F_i(\vec{A}) = (V_{iiii}|A_i|^2 + 2 \sum_{j \neq i} V_{jjii}|A_j|^2) A_i + \frac{(\omega_i + \Delta\omega_{ijkl})^2}{\omega_i^2} \sum_{\substack{j \neq i \\ k \neq i}} V_{ijkl} A_j A_k A_l^* e^{i(\Delta\omega_{ijkl})t}$$

Самомодуляция

Кросс-модуляция

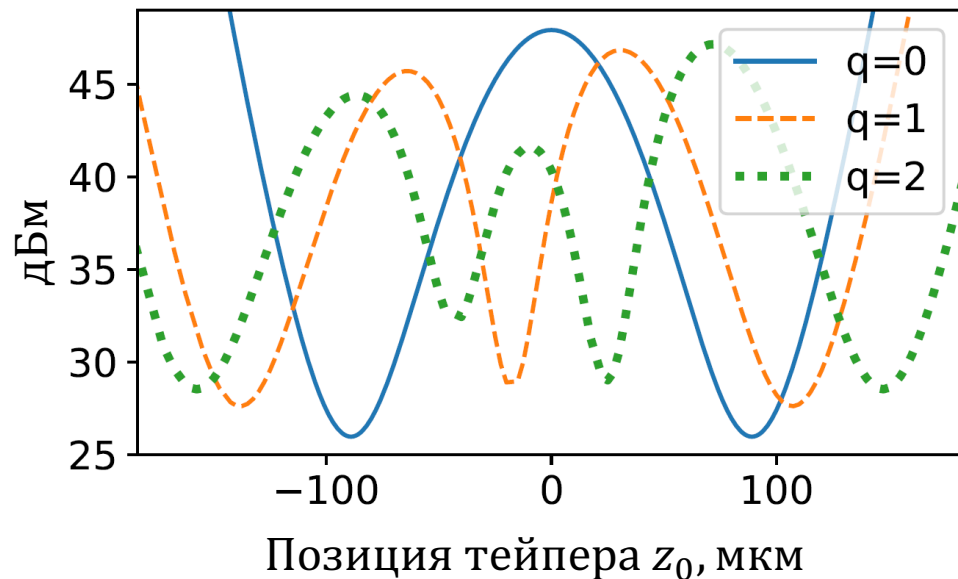
**Четырех-волновое
смешение**

Результаты аналитической модели

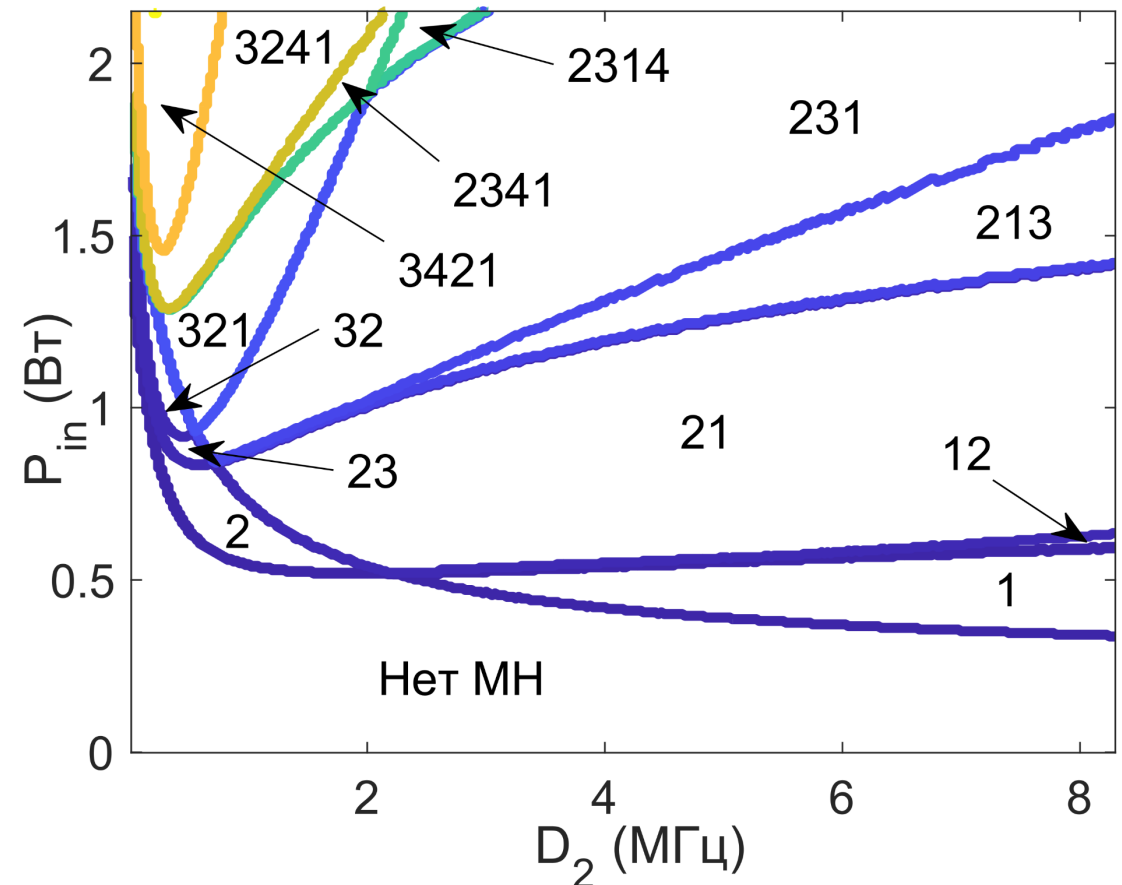
$$\begin{cases} \frac{\partial a_0}{\partial t} + i\Delta\omega_0 a_0 + \delta_0 a_0 + ig_0 |a_0|^2 a_0 = F, \\ \frac{\partial a_\mu}{\partial t} + i\Delta\omega_\mu a_\mu + \delta_\mu a_\mu + i2g_{\mu,\mu} |a_0|^2 a_\mu + ig_{\mu,-\mu} a_0^2 a_{-\mu}^* = 0 \\ \frac{\partial a_{-\mu}^*}{\partial t} - i\Delta\omega_{-\mu} a_{-\mu}^* + \delta_{-\mu} a_{-\mu}^* - i2g_{-\mu,-\mu} |a_0|^2 a_{-\mu}^* - ig_{-\mu,\mu} a_0^{*2} a_\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Delta\omega_0 = -(g_\mu + g_{-\mu})A + (D_\mu^{(int)} + D_{-\mu}^{(int)})/2 \pm \sqrt{\frac{(\delta_\mu + \delta_{-\mu})^2}{4\delta_\mu\delta_{-\mu}} \left(g_{\mu,-\mu}g_{-\mu,\mu}A^2 - \delta_\mu\delta_{-\mu} \right)}$$

Порог мощности зависит от положения
тейпера вдоль оси цилиндра



Карта режимов генерации показывает
порядок возбуждения боковых мод при
перестройке частоты источника



Условие возникновения солитона

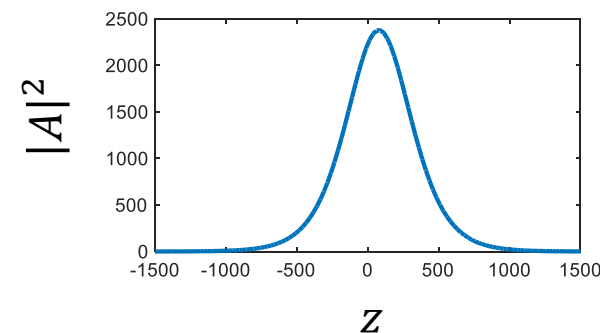
$$i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + g|A|^2 A = 0$$

Дисперсия

Нелинейность

$$A = \frac{A_0}{\cosh \frac{z}{\Delta z}} e^{i\Omega_s t}$$

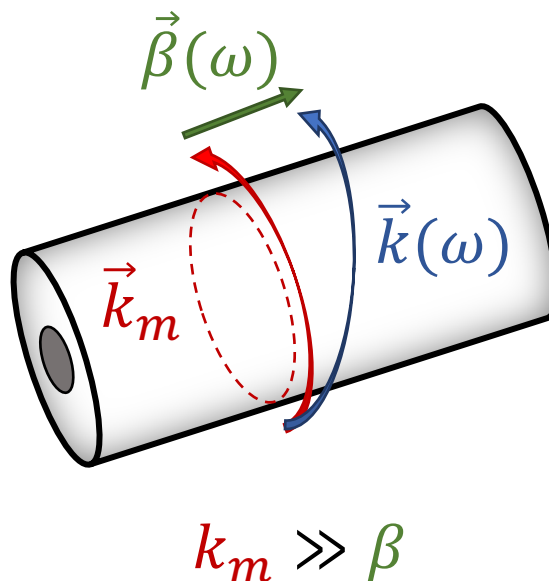
$$\frac{D_2}{\Delta z^2} = g|A_0|^2$$



Азимутальные моды - дисперсия

$$D_2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu^2} \sim \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_m^2}$$

Ширина **азимутального** солитона **зависит** от модовой дисперсии.

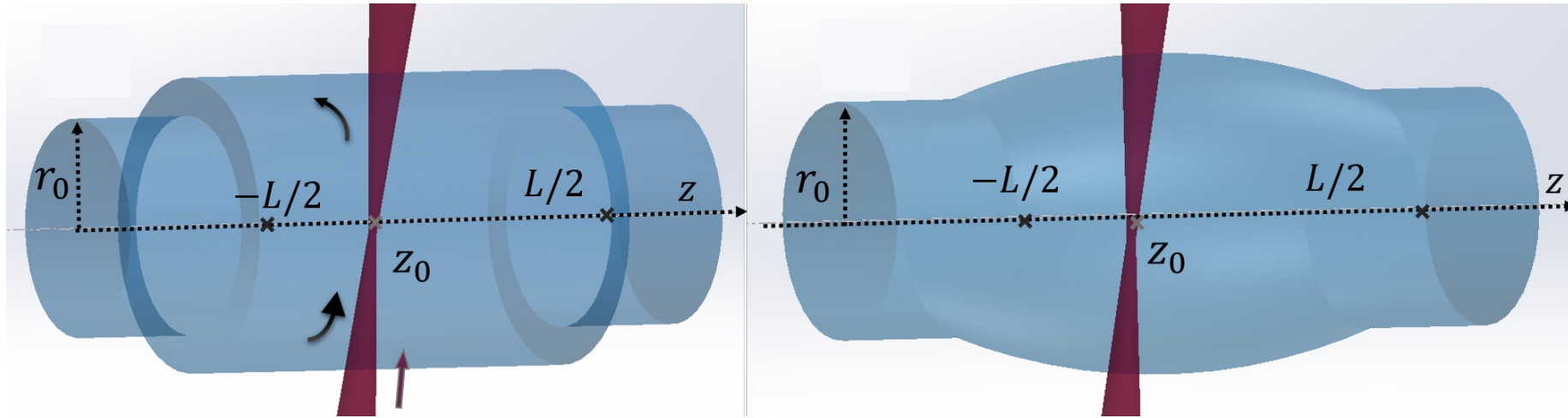


Аксиальные моды - дифракция

$$\tilde{D}_2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \frac{c^2}{\omega_m n^2}$$

Ширина **аксиального** солитона **не зависит** от модовой дисперсии.

Параметры моделирования



$$D_2 = 3 \text{ МГц}$$

$$D_2 = 0,3 \text{ МГц}$$

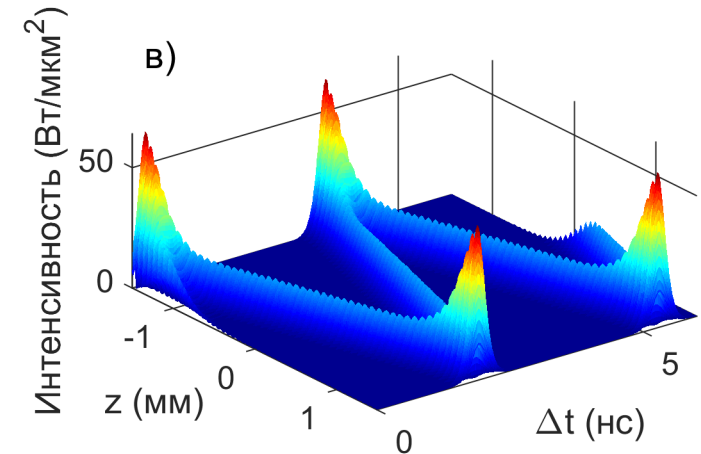
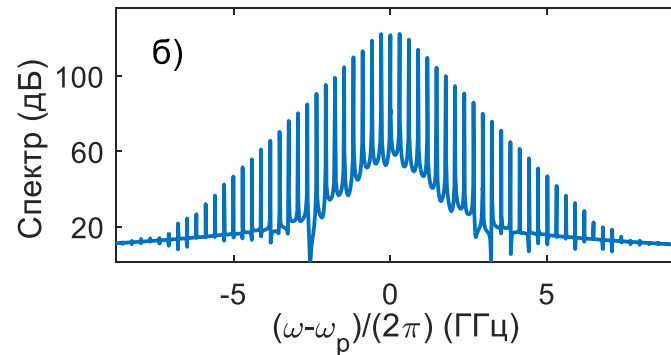
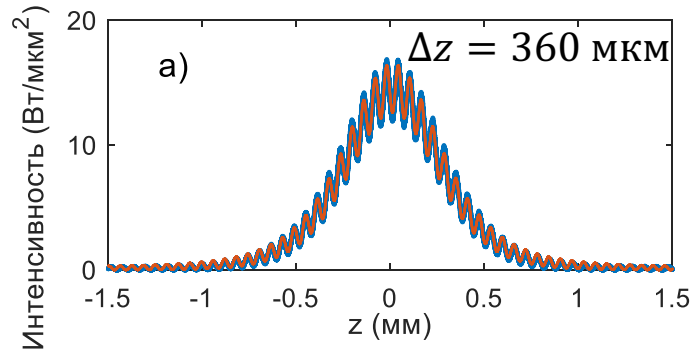
Модовая дисперсия в параболе $\ll$ модовой дисперсии в прямоугольной яме

1. Тейпер в оптимальной позиции – критическая связь.
2. Мощность накачки 3 Вт.
3. Модовая дисперсия, достаточная для модуляционной неустойчивости.

Односолитонное решение

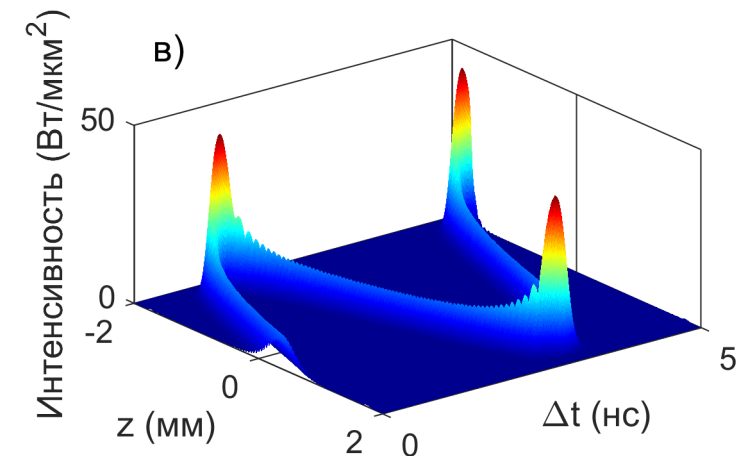
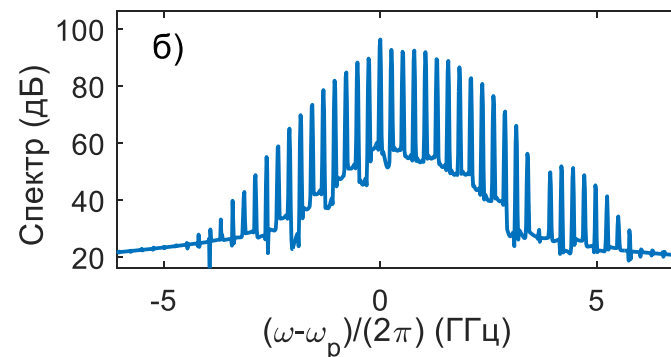
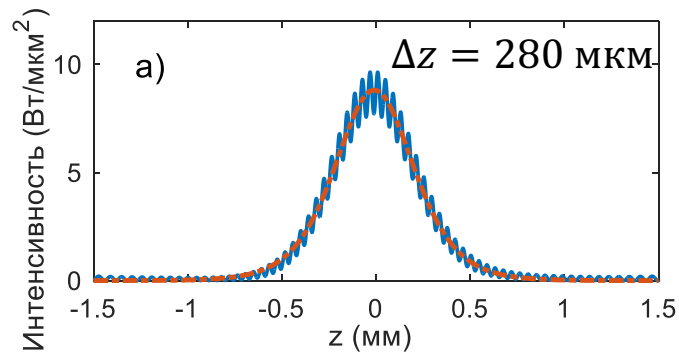
Прямоугольная форма потенциала

$$A = A_{sol} \cosh^{-1} \left(\frac{z}{\Delta z} \right) + A_0 (1 - \exp(i2\beta_q z)) \quad f_{rep} = 290 \text{ МГц} \quad D_2 = 3 \text{ МГц}$$



Параболическая форма потенциала

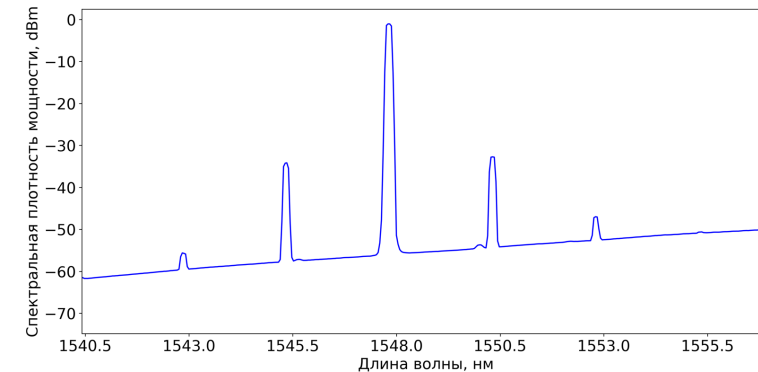
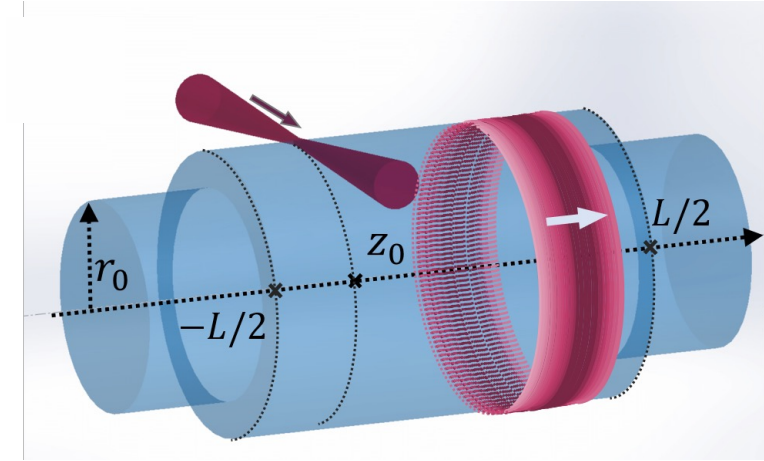
$$f_{rep} = 260 \text{ МГц} \quad D_2 = 0,3 \text{ МГц}$$



Результаты работы

Построена модель для описания нелинейной динамики поля в цилиндрическом микрорезонаторе с вариацией радиуса, в рамках которой:

1. Проведены расчеты порога мощности нелинейных эффектов и продемонстрирована его зависимость от положения элемента связи вдоль оси резонатора.
2. Предложен метод оптимизации силы связи, позволяющий уменьшить порог мощности на два порядка.
3. Проведен анализ модуляционной неустойчивости боковых от накачки мод, позволяющий определить условием на форму вариации радиуса и порог мощности нелинейной генерации.
4. Разработана численная схема для моделирования.
5. Проведено моделирование, продемонстрировавшее генерацию оптической частотной гребенки с низкой частотой повторения на серии аксиальных мод в микрорезонаторах с прямоугольной и параболической формами вариации радиуса.



Список публикаций:

1. Kolesnikova A. Y., Vatnik I. D. Modulation-instability analysis of axial-azimuthal modes in surface nanoscale axial photonic microresonators //Physical Review A. – 2024. – Т. 109. – №. 5. – С. 053520 (**Q1**, личный вклад автора 90%).
2. Kolesnikova A. Y., Vatnik I. D. Theory of nonlinear whispering-gallery-mode dynamics in surface nanoscale axial photonics microresonators //Physical Review A. – 2023. – Т. 108. – №. 3. – С. 033506 (**Q1**, личный вклад автора 90%).
3. Kolesnikova A. et al. Soliton-comb solutions for fiber-based bottle microresonators //Optics Letters. – 2025. – Т. 50. – №. 3. – С. 730-733 (**Q1**, личный вклад автора 75%).
4. Aprelov N. A. et al. Dispersive delay line based on a microcylinder// Optics Letters. – 2025. – Т. 50. – №. 10. – С. 3301–3304 (**Q1**, личный вклад автора 10%).
5. A. Novikov et al. Modal dispersion in a cylindrical WGM microcavity caused by modal energy dissipation// Opt. Commun. – 2025. – №. 583. – С. 131641 (**Q2**, личный вклад автора 10%).

Награды:

- Премия имени Михаила Городецкого в рамках Конкурса студенческих научных работ в области физики квантовых технологий 2022 г.

Колесникова Алена Юрьевна
a.kolesnikova@g.nsu.ru

Спасибо за внимание!