Новый метод получения приближенных решений линейных эволюционных уравнений с приложением к вычислению асимптотики ядра уравнения теплопроводности при малых временах

Губа Вячеслав Олегович
Резниченко Алексей Викторович

ИЯФ СО РАН

5 декабря 2025

Основной объект работы — ядро уравнения теплопроводности (heat kernel):

$$h(\tau, x, y) = \langle x| \, e^{-\hat{H}\tau} \, |y\rangle \, , \; \partial_\tau h(\tau, x, y) = -\hat{H} h(\tau, x, y),$$

где $\hat{H} = -\hat{D}_\mu \hat{D}_\mu + V(x)$, $\hat{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$, $h(0, x, y) = \delta(x - y)$. Функция $h(\tau, x, y)$ имеет несколько приложений в квантовой теории поля:

- Можно получить представление для функции Грина в теории с лагранжианом $\mathcal{L} = \left(D_\mu \phi(x)\right)^* \left(D_\mu \phi(x)\right) + V(x)|\phi(x)|^2$:

$$G(x, y) = \langle x| \, \hat{H}^{-1} \, |y\rangle = \int_0^\infty d\tau \, \langle x| \, e^{-\hat{H}\tau} \, |y\rangle = \int_0^\infty d\tau h(\tau, x, y).$$

- Можно вычислять дзета-функцию оператора $\hat{H}$:

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \, \tau^{s-1} \int d^d x \lim_{y \to x} h(\tau, x, y),$$

  а значит и функциональный детерминант:

$$\det \hat{H} = e^{-\zeta'_H(0)}.$$

Разложение по производным

Один из приближенных методов вычисления ядра $h(\tau, x, y)$ — это разложение по производным фоновых полей $V(x)$ и $A_\mu(x)$, которые предполагаются медленно меняющимися (Vassilevich D.V. Heat kernel expansion: user's manual, 2003). Такое разложение имеет следующий вид для рассматриваемого оператора $\hat{H}$:

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{4\tau} - z_\mu A_\mu(x) - V(x)\tau \right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, y) \right),$$

где $z_\mu = (x - y)_\mu$. Коэффициент $b_n(x, y)$ представляет собой полином по $V(x)$, $A_\mu(x)$ и по производным этих полей, однако в каждом слагаемом этого полинома оператор дифференцирования ∂_μ встречается ровно n раз. Если ввести масштаб L_X, на котором значительно меняются функции $A_\mu(x)$ и $V(x)$, то $b_n(x, y) \sim \epsilon^n$, где $\epsilon = L/L_X \ll 1$. Параметр L — это максимальное расстояние $|x - y|$, рассматриваемое в задаче.

Идея метода разложения по производным

Функция $h(\tau, x, y)$ является решением уравнения теплопроводности:

$$\partial_\tau h(\tau, x, y) = -\hat{H} h(\tau, x, y).$$

С помощью параметра ϵ определим "быстрые" переменные $v_\mu \equiv x_\mu$ и "медленные" переменные $X_\mu \equiv \epsilon x_\mu$. Производные в уравнении теплопроводности перепишутся следующим образом:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}.$$

Наш метод работает в предположении, что поля $A_\mu(x)$ и $V(x)$ являются функциями только переменных X_μ:

$$A_\mu(x) = A_\mu(X/\epsilon) \equiv \tilde{A}_\mu(X),$$
$$V(x) = V(X/\epsilon) \equiv \tilde{V}(X).$$

Идея метода разложения по производным

Производные полей будут пропорциональны ϵ:

$$\partial_\mu \tilde{A}_\nu(X) = \left(\frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right) \tilde{A}_\nu(X) = \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tilde{A}_\nu(X),$$
$$\partial_\mu \tilde{V}(X) = \left(\frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right) \tilde{V}(X) = \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tilde{V}(X),$$

что позволяет разложение ядра $h(\tau, x, y)$ по производным искать в виде разложения по параметру ϵ:

$$h(\tau, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n h^{(n)}(\tau, x, y).$$

В каждом порядке по ϵ получается несложное уравнение с правой частью, которое может быть решено преобразованием Фурье по переменным v_μ.

Результат для разложения по производным

В результате для разложения вида:

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{4\tau} - z_\mu A_\mu(x) - V(x)\tau \right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, y) \right),$$

мы получаем явные выражения для коэффициентов $b_n(x, y)$:

$$\begin{aligned}
b_0(x, y) &= 1, \\
b_1(x, y) &= \frac{1}{2}\tau z_\mu V_{,\mu}(x) + \frac{1}{2} z_\mu z_\nu A_{\mu,\nu}(x), \\
b_2(x, y) &= -\frac{1}{6}\tau^2 V_{,\mu\mu}(x) + \frac{1}{12}\tau^3 V_{,\mu}(x) V_{,\mu}(x) - \frac{1}{6}\tau^2 A_{\mu,\nu}(x) A_{\nu,\mu}(x) \\
&+ \frac{1}{6}\tau^2 A_{\mu,\nu}(x) A_{\mu,\nu}(x) - \frac{1}{6}\tau^2 z_\mu V_{,\nu}(x) A_{\nu,\mu}(x) + \cdots ,
\end{aligned}$$

где $z_\mu = (x - y)_\mu$, $V_{,\mu}(x) \equiv \partial_\mu V(x)$, $A_{\mu,\nu}(x) \equiv \partial_\nu A_\mu(x)$ и т.д.
Заметим, что $z^2 \lesssim \tau$.

Эволюционные уравнения

Описанный нами метод может применяться для получения приближенных решений различных эволюционных уравнений.

Пример 1

Для уравнения Фоккера-Планка:

$$\partial_t G(x,t;y) = \partial_x \left[a(x) G(x,t;y)\right] + \mu \partial_x^2 G(x,t;y),$$

с медленно меняющейся функцией $a(x)$ мы получили функцию Грина 2-го рода:

$$G(x,t;y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \exp\left\{-\frac{(x-y+a(x)t)^2}{4\mu t}\right\} \left[1 + \frac{1}{2}a'(x)t + \right.$$
$$\left. + \frac{a'(x)}{4\mu}(x-y)(x-y+a(x)t) + O(\epsilon^2)\right].$$

Эволюционные уравнения

Пример 2
Для нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\partial_t G(x,t;y) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 G(x,t;y) - V(x)G(x,t;y) = 0,$$

с медленно меняющимся потенциалом $V(x)$ мы получили функцию Грина 2-го рода $G(x,t;y) = \langle x| e^{-i\hat{H}t} |y\rangle$. С помощью функции Грина мы получили разложение по производным потенциала $V(x)$ для квантово-механической стат. суммы:

$$Z_{QM}(T) = \int dx \, \langle x| e^{-i\hat{H}T} |x\rangle = \int dx \frac{e^{-iV(x)T}}{\sqrt{2\pi i T/m}} \Big\{ 1 + \frac{T^2}{24\, m} V_2 + \frac{iT^3}{1152\, m^2} V_4 + \frac{7T^4}{5760\, m^2} V_2^2 + \frac{31T^6}{967680\, m^3} V_2^3 + \frac{iT^5}{362880\, m^3} V_3^2 + \frac{iT^5}{15360\, m^3} V_2 V_4 - \frac{T^4}{82944\, m^3} V_6 + O(\epsilon^8) \Big\},$$

где $V_n \equiv \partial^n V(x)/\partial x^n$.

Асимптотика при малом времени

Существует другое приближение для ядра $h(\tau, x, y)$ — разложение по степеням малого собственного времени $\tau = \varepsilon T_0$, $\varepsilon \ll 1$:

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{4\tau} \right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y)\tau^n \right).$$

Предлагаемый нами метод получения разложения по малому времени основан на следующем представлении ядра $h(\tau, x, y)$ (Nepomechie R. I. Calculating heat kernels, 1985):

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-z^2/4\tau} \int \frac{d^d q}{\pi^{d/2}} e^{-q^2} e^{-\hat{H}\tau - z\cdot\hat{D} - 2i\sqrt{\tau} q\cdot\hat{D}} 1,$$

где $z_\mu = (x - y)_\mu$, и операторы действуют на 1, стоящую справа.

Идея метода разложения по малому времени

Чтобы получить разложение по τ, "отфакторизуем" оператор $e^{-z\cdot\hat{D}}$:

$$h(\tau,x,y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-z^2/4\tau} e^{-z\cdot\hat{D}} \int \frac{d^d q}{\pi^{d/2}} e^{-q^2} \hat{L}(1)1,$$

где $\hat{L}(\gamma) = e^{\gamma z\cdot\hat{D}} e^{-\gamma\left(\tau\hat{H} + 2i\sqrt{\tau}q\cdot\hat{D} + z\cdot\hat{D}\right)}$ — оператор, который можно представить в виде ряда по параметру $\alpha \equiv \sqrt{\tau}$:

$$\hat{L}(\gamma) = \hat{L}_0(\gamma) + \alpha\hat{L}_1(\gamma) + \alpha^2\hat{L}_2(\gamma) + \cdots\ ,$$

а затем составить дифференциальные уравнения (по γ) на каждый $\hat{L}_n(\gamma)$:

$$\begin{aligned}
&\hat{L}_0'(\gamma) = 0,\\
&\hat{L}_1'(\gamma) = -2iq_\mu e^{\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{D}_\mu e^{-\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{L}_0(\gamma),\\
&\hat{L}_2'(\gamma) = -e^{\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{H} e^{-\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{L}_0(\gamma) - 2iq_\mu e^{\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{D}_\mu e^{-\gamma z\cdot\hat{D}} \hat{L}_1(\gamma), \ldots
\end{aligned}$$

Результат для асимптотики при малом времени

Решая уравнения и учитывая следующие начальные условия:

$$\hat{L}_0(0) = \hat{I},\ \hat{L}_1(0) = 0,\ \hat{L}_2(0) = 0,\ \ldots$$

получаем разложение следующего вида:

$$h(\tau, x, y) = \frac{e^{-z^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-z_\nu \int_0^1 d\theta A_\nu(x-\theta z)} \left[\tilde{a}_0(x,y) + \tau \tilde{a}_1(x,y) + O(\varepsilon^2)\right],$$

где $\tilde{a}_0(x,y) = 1$ и:

$$\tilde{a}_1(x,y) = z_\alpha \int_0^1 d\theta\, \theta(1-\theta)\partial_\mu F_{\alpha\mu}(x_\theta) + 2 z_\alpha z_\beta \int_0^1 d\theta F_{\alpha\mu}(x_\theta) \times$$
$$\int_0^\theta d\theta_1\, \theta_1 F_{\beta\mu}(x_{\theta_1}) - z_\alpha z_\beta \int_0^1 d\theta_1\, \theta_1 F_{\alpha\mu}(x_{\theta_1}) \int_0^1 d\theta_2\, \theta_2 F_{\beta\mu}(x_{\theta_2}) - \int_0^1 d\theta\, V(x_\theta),$$

где $(x_\theta)_\mu = y_\mu + \theta z_\mu$, $F_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x)$.

Заключение

- Развит метод нахождения приближенных решений эволюционных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Применение этого метода было рассмотрено на следующих примерах:
  - Разложение по производным медленно меняющихся фоновых полей для ядра уравнения теплопроводности $\langle x| e^{-\hat{H}\tau} |y\rangle$, где $\hat{H} = -\hat{D}_\mu \hat{D}_\mu + V(x)$.
  - Уравнение Фоккера-Планка с медленно меняющимися коэффициентами.
  - Уравнение Шредингера с медленно меняющимся потенциалом.
  - $\cdots$
- Также для ядра уравнения теплопроводности развит альтернативный метод получения асимптотики при малых собственных временах τ.