А.В. Киселёв

ИМ СО РАН

# Квантовомеханическая аналогия для описания столкновений нестабильных частиц

В киральной теории возмущений нестабильность появляется за счёт взаимодействия, к примеру

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu)(\partial^\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu) + \frac{1}{2} m_\rho^2 + \frac{g_{\rho\pi\pi}}{2} \rho_\mu (\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+)$$

На языке уравнения Шрёдингера $\rho$ является собственным вектором невозмущённого гамильтониана $\hat{H}_0$ и становится нестабильным из-за возмущения $\hat{V}$.

По аналогии рассмотрим в квантовой механике взаимодействие состояний двух частиц, одно из которых является нестабильным. Привычным было бы выбрать

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$
$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{01}(\vec{r}_1) + \hat{H}_{02}(\vec{r}_2) = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}$$
$$\hat{V} = \hat{V}_1(\vec{r}_1) + \hat{V}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t = 0) = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)$$

где $\psi_1$ и $\psi_2$ - собственные функции $\hat{H}_{01}$ и $\hat{H}_{02}$, а $\hat{V}_1(\vec{r}_1)$ отвечает за нестабильность первой частицы.

Сделаем трюк и пойдём другим путём, "отправив" $\hat{V}_1(\vec{r}_1)$ в $\hat{H}_0$ и переопределив $\hat{V}$:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{01}(\vec{r}_1) + \hat{H}_{02}(\vec{r}_2) = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \hat{V}_1(\vec{r}_1) + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}$$

$$\hat{V} = -\hat{V}_1(\vec{r}_1) + \hat{V}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \hat{V}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t = 0) = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)$$

Таким способом нетрудно получить целый класс точно решаемых задач. $\hat{H}_0$ уже не свободный, но схема не изменилась. По-прежнему $\psi_1$ и $\psi_2$ - собственные функции $\hat{H}_{01}$ и $\hat{H}_{02}$, а состояние первой частицы нестабильно "само по себе".

## В качестве примера возьмём

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + G_1\delta(x_1) + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}$$

$$\hat{V} = -G_1\delta(x_1) + G_2\delta(x_1 - x_2)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + G_2\delta(x_1 - x_2)$$

$G_1, G_2 > 0$.

## Собственные функции гамильтониана $\frac{\hat{p}^2}{2m} + G\delta(x)$

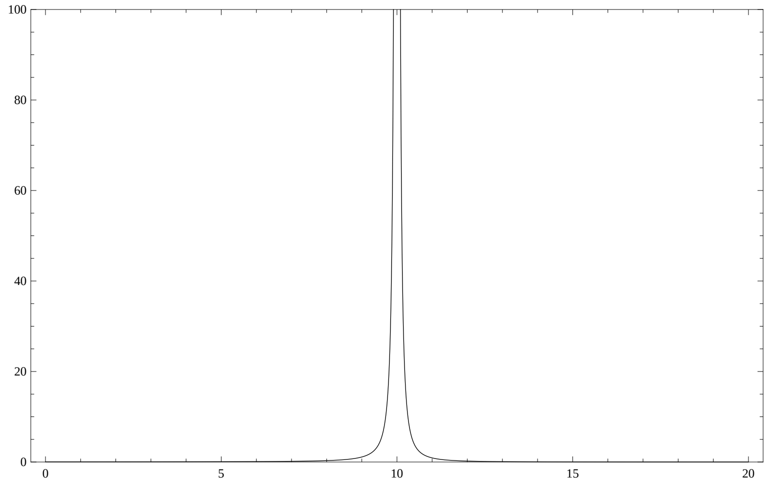
$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k|x| + \phi(k)),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$$

$$k \geq 0;\ \ \mathrm{tg}(\phi(k)) = -\frac{\varkappa}{k},\ \ \varkappa = \frac{mG}{\hbar^2}$$

**При вычислениях использовалась регуляризация, когда подынтегральная функция домножается на $e^{-\varepsilon|x|}$ и в конце $\varepsilon \to 0$. Тогда**

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k|x|+\phi) = \cos(\phi)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)+\sin(\phi)\int_0^\infty \frac{dk'}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k'x)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{k'-k-i\varepsilon}+\frac{1}{k'-k+i\varepsilon}-\frac{1}{k'+k-i\varepsilon}-\frac{1}{k'+k+i\varepsilon}\right)$$

**При $k' \neq k$ выражение в скобках даёт $\frac{2k}{k'^2-k^2}$. Нарисуем график получившегося распределения $P(k') = \frac{4k^2}{(k'^2-k^2)^2}$ для $k = 10$:**




Легко видеть, что вся бесконечная норма сосредоточена возле $k' = k$. В частности, это приводит к тому, что нормированный на единицу пакет

$\psi(x) = \int_{k_0}^{k_0+\Delta k} \frac{dk}{\sqrt{\Delta k}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k|x|+\phi)$ не расплывается в свободном гамильтониане при $\Delta k \to 0$: $< \psi(x,0)|\psi(x,t) > \to e^{-i\hbar t k^2/2m}$

**Вместе с тем, в функции** $\cos(k|x|+\phi)+i\sin(kx)$ **есть доля** $e^{-ikx}$**, пропорциональная** $(1-\cos\phi)^2$**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}dx(\cos(k|x|+\phi)+i\sin(kx))e^{ik'x}e^{-\varepsilon|x|}=-\frac{1}{2}\delta(k'-k)+$$

$$+\frac{i}{4\pi}(\frac{e^{i\phi}}{k+k'+i\varepsilon}-\frac{e^{-i\phi}}{k+k'-i\varepsilon}+\frac{e^{i\phi}}{k-k'+i\varepsilon}-\frac{e^{-i\phi}}{k-k'-i\varepsilon})=$$

$$-\frac{1}{2}\delta(k'-k)+\frac{1}{2}\cos\phi\,\delta(k'-k)+...$$

В итоге приходим к состоянию
$(e^{i\phi_1(k_1)}\cos(k_1|x_1|+\phi_1(k_1))+i\sin(k_1x_1))e^{ik_2x_2}$,
находящемуся в гамильтониане $\frac{\hat{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}+G_2\delta(x_1-x_2)$.
С помощью разложения по собственным функциям этого гамильтониана можно построить эволюцию.

$$
\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos\Big(k_1|x_1|+\phi_1(k_1)\Big)e^{ik_2x_2}=\int_0^\infty dk_3\int_{-\infty}^\infty dk_4\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos\Big(k_3|x_1-x_2|+\phi_2(k_3)\Big)e^{ik_4\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_s}}
$$

$$
\Big(\frac{e^{i\phi_1(k)}}{k_1+k_2-k_4+i\varepsilon}+\frac{e^{-i\phi_1(k)}}{k_1+k_2-k_4-i\varepsilon}+\frac{e^{-i\phi_1(k)}}{-k_1+k_2-k_4+i\varepsilon}-\frac{e^{i\phi_1(k)}}{-k_1+k_2-k_4-i\varepsilon}\Big)
$$

$$
\times\Big(\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}-k_3-i\varepsilon}-\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}-k_3+i\varepsilon}+\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}+k_3-i\varepsilon}-\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}+k_3+i\varepsilon}\Big)
$$

$$
+\int_0^\infty dk_3\int_{-\infty}^\infty dk_4\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin(k_3(x_1-x_2))e^{ik_4\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_s}}\frac{1}{4\pi}\Big(\delta(k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}-k_3)-\delta(k_2-k_4\frac{m_2}{m_s}+k_3)\Big)
$$

$$
\times\Big(\frac{e^{i\phi_1(k)}}{k_1+k_2-k_4+i\varepsilon}+\frac{e^{-i\phi_1(k)}}{k_1+k_2-k_4-i\varepsilon}+\frac{e^{-i\phi_1(k)}}{-k_1+k_2-k_4+i\varepsilon}-\frac{e^{i\phi_1(k)}}{-k_1+k_2-k_4-i\varepsilon}\Big)
$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin(k_1x_1)e^{ik_2x_2} = \int_0^\infty dk_3\int_{-\infty}^\infty dk_4\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin(k_3(x_1-x_2))e^{ik_4\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_s}}\frac{1}{2}\Big(\delta(k_4-k_1-k_2)\delta(k_3-\frac{m_2}{m_s}k_1+\frac{m_1}{m_s}k_2)$$

$$+\delta(k_4+k_1-k_2)\delta(k_3-\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s})-\delta(k_4-k_1-k_2)\delta(k_3+\frac{m_2}{m_s}k_1-\frac{m_1}{m_s}k_2)-\delta(k_4+k_1-k_2)\delta(k_3+\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s})\Big)+$$

$$\int_0^\infty dk_3\int_{-\infty}^\infty dk_4\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos\Big(k_3|x_1-x_2|+\phi_2(k_3)\Big)e^{ik_4\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_s}}\frac{1}{4\pi}\Big(\delta(k_4-k_1-k_2)\Big(\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{k_3+\frac{m_1}{m_s}k_2-\frac{m_2}{m_s}k_1+i\varepsilon}-\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{k_3+\frac{m_1}{m_s}k_2-\frac{m_2}{m_s}k_1-i\varepsilon}\Big)$$

$$+\delta(k_4-k_1-k_2)\Big(\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{-k_3+\frac{m_1}{m_s}k_2-\frac{m_2}{m_s}k_1+i\varepsilon}-\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{-k_3+\frac{m_1}{m_s}k_2-\frac{m_2}{m_s}k_1-i\varepsilon}\Big)$$

$$-\delta(k_4+k_1-k_2)\Big(\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{k_3+\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s}+i\varepsilon}-\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{k_3+\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s}-i\varepsilon}\Big)-\delta(k_4+k_1-k_2)\Big(\frac{e^{-i\phi_2(k_3)}}{-k_3+\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s}+i\varepsilon}-\frac{e^{i\phi_2(k_3)}}{-k_3+\frac{m_1k_2+m_2k_1}{m_s}-i\varepsilon}\Big)\Big)$$

В качестве характеристики рассеяния рассчитан "средний коэффициент отражения", полученный разложением пакета

$$\int_{k_1}^{k_1+\Delta k_1}\int_{k_2}^{k_2+\Delta k_2}\frac{dk_1'dk_2'}{\sqrt{\Delta k_1\Delta k_2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}(e^{i\phi_1(k_1')}\cos(k_1'|x|+\phi_1(k_1)+i\sin(k_1'x_1))e^{ik_2'x_2}$$

по "функциям рассеяния" в потенциале $G_2\delta(x_1-x_2)$ с домножением на коэффициент отражения, далее $\Delta k_1$ и $\Delta k_2$ устремляются к нулю. Получается

$$\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_2^2+\frac{(m_2k_1-m_1k_2)^2}{m_s^2}}(1-\frac{\varkappa_1^2}{2k_1^2+2\varkappa_1^2})+\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_2^2+\frac{(m_2k_1+m_1k_2)^2}{m_s^2}}\frac{\varkappa_1^2}{2k_1^2+2\varkappa_1^2}$$

Замечательно, что при близости к нулю суммы $m_2k_1+m_1k_2$ поправка получает усиление ($m_s\equiv m_1+m_2$).

Рассмотренная в качестве примера модель

1. Одномерная;
2. Потенциал локальный;
3. Нет связанных состояний;
4. Начальное состояние практически стабильно.

Интересно посмотреть, что произойдёт, если изменить эти свойства.

Спасибо за внимание!