Развитие метода получения приближенных решений эволюционных уравнений с применением к вычислению ядра уравнения теплопроводности

Губа Вячеслав Олегович
Резниченко Алексей Викторович

ИЯФ СО РАН

11 марта 2026

Основной объект работы — ядро уравнения теплопроводности (heat kernel):

$$h(\tau, x, y) = \langle x| e^{-\hat{H}\tau} |y\rangle \,,\ \partial_\tau h(\tau, x, y) = -\hat{H} h(\tau, x, y),$$

где $\hat{H} = -\hat{D}_\mu \hat{D}_\mu + V(x)$, $\hat{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$, $h(0, x, y) = \delta(x - y)$. Функция $h(\tau, x, y)$ имеет несколько приложений в квантовой теории поля:

- Представление для функции Грина в теории с лагранжианом $\mathcal{L} = (D_\mu \phi(x))^* (D_\mu \phi(x)) + V(x)|\phi(x)|^2$:

$$G(x, y) = \langle x| \hat{H}^{-1} |y\rangle = \int_0^\infty d\tau \, \langle x| e^{-\hat{H}\tau} |y\rangle = \int_0^\infty d\tau h(\tau, x, y).$$

- Вычисление эффективного действия (Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization, 1951):

$$\Gamma[A] = \frac{1}{2} \ln \mathrm{Det} \hat{H} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int d^d x \lim_{y \to x} h(\tau, x, y)$$

Разложение по производным

Один из приближенных методов вычисления ядра $h(\tau, x, y)$ — это разложение по производным фоновых полей $V(x)$ и $A_\mu(x)$, которые предполагаются медленно меняющимися (Vassilevich D.V. Heat kernel expansion: user's manual, 2003). Такое разложение имеет следующий вид для рассматриваемого оператора $\hat{H}$:

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{4\tau} - z_\mu A_\mu(x) - V(x)\tau \right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, y) \right),$$

где $z_\mu = (x - y)_\mu$. Коэффициент $b_n(x, y)$ представляет собой полином по $V(x)$, $A_\mu(x)$ и по производным этих полей, однако в каждом слагаемом этого полинома оператор дифференцирования ∂_μ встречается ровно n раз. Если ввести масштаб L_X, на котором значительно меняются функции $A_\mu(x)$ и $V(x)$, то $b_n(x, y) \sim \epsilon^n$, где $\epsilon = L/L_X \ll 1$. Параметр L — это максимальное расстояние $|x - y|$, рассматриваемое в задаче.

Идея метода разложения по производным

Функция $h(\tau, x, y)$ является решением уравнения теплопроводности:

$$\partial_\tau h(\tau, x, y) = -\hat{H} h(\tau, x, y).$$

С помощью параметра ϵ определим "быстрые" переменные $v_\mu \equiv x_\mu$ и "медленные" переменные $X_\mu \equiv \epsilon x_\mu$. Производные в уравнении теплопроводности перепишутся следующим образом:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}.$$

Наш метод работает в предположении, что поля $A_\mu(x)$ и $V(x)$ являются функциями только переменных X_μ:

$$A_\mu(x) = A_\mu(X/\epsilon) \equiv \tilde{A}_\mu(X),$$
$$V(x) = V(X/\epsilon) \equiv \tilde{V}(X).$$

Идея метода разложения по производным

Производные полей будут пропорциональны ϵ:

$$\partial_\mu \tilde{A}_\nu(X) = \left(\frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right) \tilde{A}_\nu(X) = \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tilde{A}_\nu(X),$$
$$\partial_\mu \tilde{V}(X) = \left(\frac{\partial}{\partial v_\mu} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu}\right) \tilde{V}(X) = \epsilon \frac{\partial}{\partial X_\mu} \tilde{V}(X),$$

что позволяет разложение ядра $h(\tau, x, y)$ по производным искать в виде разложения по параметру ϵ:

$$h(\tau, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n h^{(n)}(\tau, x, y).$$

В каждом порядке по ϵ получается несложное уравнение с правой частью, которое может быть решено преобразованием Фурье по переменным v_μ.

Результат для разложения по производным

В результате для разложения вида:

$$h(\tau,x,y)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}}\exp\left\{-\frac{z^2}{4\tau}-z_\mu A_\mu(x)-V(x)\tau\right\}\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x,y)\right),$$

мы получаем явные выражения для коэффициентов $b_n(x,y)$, $b_0(x,y)=1$:

$$\begin{aligned}
&b_1(x,y)=\frac{1}{2}\tau z_\mu V_{,\mu}+\frac{1}{2}z_\mu z_\nu A_{\mu,\nu},\\
&b_2(x,y)=-\frac{1}{6}\tau^2 V_{,\mu\mu}+\frac{1}{12}\tau^3 V_{,\mu}V_{,\mu}+\frac{1}{8}\tau^2 z_\mu z_\nu V_{,\mu}V_{,\nu}-\frac{1}{6}\tau z_\mu z_\nu V_{,\mu\nu}+\\
&\frac{1}{6}\tau^2 z_\mu V_{,\nu}F_{\nu\mu}+\frac{1}{12}\tau^2 F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{12}\tau z_\mu z_\nu F_{\mu\alpha}F_{\nu\alpha}+\frac{1}{6}\tau z_\mu F_{\mu\nu,\nu}-\\
&\frac{1}{6}z_\mu z_\nu z_\alpha A_{\mu,\nu\alpha}+\frac{1}{8}z_\mu z_\nu z_\alpha z_\beta A_{\mu,\nu}A_{\alpha,\beta}+\frac{1}{4}\tau z_\mu z_\nu z_\alpha V_{,\alpha}A_{\mu,\nu},
\end{aligned}$$

где $z_\mu=(x-y)_\mu$, $V_{,\mu}\equiv\partial_\mu V(x)$, $A_{\mu,\nu}\equiv\partial_\nu A_\mu(x)$ и т.д.
Заметим, что $z^2\lesssim\tau$.

Эволюционные уравнения

Описанный нами метод может применяться для получения приближенных решений различных эволюционных уравнений.

Пример 1

Для уравнения Фоккера-Планка:

$$\partial_t G(x,t;y) = \partial_x \left[a(x)G(x,t;y)\right] + \mu\partial_x^2 G(x,t;y),$$

с медленно меняющейся функцией $a(x)$ мы получили функцию Грина 2-го рода:

$$G(x,t;y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \exp\left\{-\frac{(x-y+a(x)t)^2}{4\mu t}\right\} \Bigg[1 + \frac{1}{2}a'(x)t +$$

$$\frac{a'(x)}{4\mu}(x-y)(x-y+a(x)t) + O(\epsilon^2)\Bigg].$$

Эволюционные уравнения

Пример 2

Для нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\partial_t G(x,t;y) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 G(x,t;y) - V(x)G(x,t;y) = 0,$$

с медленно меняющимся потенциалом $V(x)$ мы получили функцию Грина 2-го рода $G(x,t;y) = \langle x|\, e^{-i\hat{H}t}\, |y\rangle$. С помощью функции Грина мы получили разложение по производным потенциала $V(x)$ для квантово-механической стат. суммы:

$$Z_{QM}(T) = \int dx\, \langle x|\, e^{-i\hat{H}T}\, |x\rangle = \int dx \frac{e^{-iV(x)T}}{\sqrt{2\pi i T/m}}\Bigg\{1 + \frac{T^2}{24\,m}V_2 + \frac{iT^3}{1152\,m^2}V_4 + \frac{7T^4}{5760\,m^2}V_2^2 + \frac{31T^6}{967680\,m^3}V_2^3 + \frac{iT^5}{362880\,m^3}V_3^2 + \frac{iT^5}{15360\,m^3}V_2V_4 - \frac{T^4}{82944\,m^3}V_6 + O(\epsilon^8)\Bigg\},$$

где $V_n \equiv \partial^n V(x)/\partial x^n$.

Асимптотика при малом времени

Существует другое приближение для ядра $h(\tau, x, y)$ — разложение по степеням малого собственного времени $\tau = \varepsilon T_0$, $\varepsilon \ll 1$:

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{4\tau} \right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y)\tau^n \right).$$

Предлагаемый нами метод получения разложения по малому времени основан на следующем представлении ядра $h(\tau, x, y)$ (Nepomechie R. I. Calculating heat kernels, 1985):

$$h(\tau, x, y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-z^2/4\tau} \int \frac{d^d q}{\pi^{d/2}} e^{-q^2} e^{-\hat{H}\tau - z\cdot\hat{D} - 2i\sqrt{\tau}q\cdot\hat{D}} 1,$$

где $z_\mu = (x-y)_\mu$, и операторы действуют на 1, стоящую справа.

Идея метода разложения по малому времени

Чтобы получить разложение по τ, "отфакторизуем" оператор $e^{-z\cdot\hat{D}}$:

$$h(\tau,x,y)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}}e^{-z^2/4\tau}e^{-z\cdot\hat{D}}\int\frac{d^dq}{\pi^{d/2}}e^{-q^2}\hat{L}(1)1,$$

где $\hat{L}(\gamma)=e^{\gamma z\cdot\hat{D}}e^{-\gamma\left(\tau\hat{H}+2i\sqrt{\tau}q\cdot\hat{D}+z\cdot\hat{D}\right)}$ — оператор, который удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\partial_\gamma\hat{L}(\gamma)=-e^{\gamma z\cdot\hat{D}}\left(\tau\hat{H}+2i\sqrt{\tau}q\cdot\hat{D}\right)e^{-\gamma z\cdot\hat{D}}\hat{L}(\gamma).$$

Введём обозначения для операторов, стоящих в правой части:

$$\hat{D}_\mu(\gamma)\equiv e^{\gamma z\cdot\hat{D}}\hat{D}_\mu e^{-\gamma z\cdot\hat{D}}=\hat{D}_\mu+z_\nu\int_0^\gamma d\theta\,F_{\nu\mu}(x+\theta z),$$

$$V(\gamma)\equiv e^{\gamma z\cdot\hat{D}}V(x)e^{-\gamma z\cdot\hat{D}}=V(x+\gamma z),$$

$$\hat{H}(\gamma)\equiv e^{\gamma z\cdot\hat{D}}\hat{H}e^{-\gamma z\cdot\hat{D}}.$$

Идея метода разложения по малому времени

Решением уравнения на оператор $\hat{L}(\gamma)$ с начальным условием $\hat{L}(0) = \hat{I}$ является упорядоченная экспонента:

$$\hat{L}(\gamma) = \boldsymbol{P} \exp\left\{-\tau \int_0^\gamma d\theta \hat{H}(\theta) - 2i\sqrt{\tau} q_\mu \int_0^\gamma d\theta \hat{D}_\mu(\theta)\right\}.$$

Проинтегрируем по q_μ:

$$\int \frac{d^d q}{\pi^{d/2}} e^{-q^2} \hat{L}(\gamma) = \boldsymbol{P} \exp\left\{-\tau \int_0^\gamma d\theta \hat{H}(\theta) - \tau \int_0^\gamma d\theta_1 \hat{D}_\mu(\theta_1) \int_0^\gamma d\theta_2 \hat{D}_\mu(\theta_2)\right\}.$$

Таким образом, для получения произвольного члена разложения по степеням τ достаточно разложить упорядоченную экспоненту до нужного порядка, подействовать получившимся оператором на 1, и затем на результат подействовать оператором сдвига $e^{-z\cdot\partial}$:

$$h(\tau, x, y) = \frac{e^{-z^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-z_\nu \int_0^1 d\theta A_\nu(x-\theta z)} e^{-z\cdot\partial} \times$$
$$\boldsymbol{P} \exp\left\{-\tau \int_0^1 d\theta \hat{H}(\theta) - \tau \int_0^1 d\theta_1 \hat{D}_\mu(\theta_1) \int_0^1 d\theta_2 \hat{D}_\mu(\theta_2)\right\} 1.$$

Результат для асимптотики при малом времени

Получаем разложение следующего вида:

$$h(\tau,x,y)=\frac{e^{-z^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}}e^{-z_\nu\int_0^1 d\theta A_\nu(x-\theta z)}\left[\tilde{a}_0(x,y)+\tau\tilde{a}_1(x,y)+O(\varepsilon^2)\right],$$

где $\tilde{a}_0(x,y)=1$ и:

$$\tilde{a}_1(x,y)=z_\alpha\int_0^1 d\theta\,\theta(1-\theta)\partial_\mu F_{\alpha\mu}(x_\theta)+2z_\alpha z_\beta\int_0^1 d\theta F_{\alpha\mu}(x_\theta)\times$$
$$\int_0^\theta d\theta_1\,\theta_1 F_{\beta\mu}(x_{\theta_1})-z_\alpha z_\beta\int_0^1 d\theta_1\,\theta_1 F_{\alpha\mu}(x_{\theta_1})\int_0^1 d\theta_2\,\theta_2 F_{\beta\mu}(x_{\theta_2})-\int_0^1 d\theta\,V(x_\theta),$$
$$\tilde{a}_2(x,y)=\ldots.$$

где $(x_\theta)_\mu=y_\mu+\theta z_\mu,\ F_{\alpha\beta}(x)=\partial_\alpha A_\beta(x)-\partial_\beta A_\alpha(x)$.

Заключение

- Развит метод нахождения приближенных решений эволюционных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Применение этого метода было рассмотрено на следующих примерах:
    - Разложение по производным медленно меняющихся фоновых полей для ядра уравнения теплопроводности $\langle x| e^{-\hat{H}\tau} |y\rangle$, где $\hat{H} = -\hat{D}_\mu \hat{D}_\mu + V(x)$.
    - Уравнение Фоккера-Планка с медленно меняющимися коэффициентами.
    - Уравнение Шредингера с медленно меняющимся потенциалом.
    - $\cdots$
- Также для ядра уравнения теплопроводности развит альтернативный метод получения асимптотики при малых собственных временах τ.