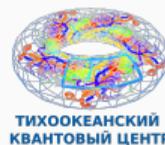


# Переход Березинского–Костерлица–Таулесса в 2D сверхтекучей жидкости

---



А.М. Бегун, А.В. Молочков,  
А.В. Зорина, К.Л. Зарембо



Дальневосточный федеральный университет  
Тихоокеанский квантовый центр

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект Государственного задания № FZNS-2024-0002.

# Теорема Мермина–Вагнера

## Формулировка

В системах с непрерывной симметрией и короткодействующим взаимодействием спонтанное нарушение симметрии в  $d \leq 2$  при конечной температуре невозможно.

Причина: флуктуации голдстоуновской моды

$$S = \frac{K}{2} \int d^2x (\nabla\theta)^2$$

$$\langle\theta^2\rangle \sim \int \frac{d^2k}{k^2} \rightarrow \infty$$

## Следствие

- истинный дальний порядок отсутствует
- может существовать квазидальний порядок

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle \sim e^{-x/\xi}$$

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle \sim |x|^{-\eta}$$

# Переход Березинского–Костерлица–Таулесса

## Механизм перехода: распаривание вихрей

### Низкие температуры ( $T < T_c$ )

- вихри образуют связанные пары
- квазидальний порядок

### Корреляционная функция

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim |x|^{-\eta}$$

степенной спад

### Высокие температуры ( $T > T_c$ )

- пары вихрь–антивихрь распадаются
- газ свободных вихрей

### Корреляционная функция

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim e^{-x/\xi}$$

экспоненциальный спад

### Корреляционная длина

$$\xi \sim \exp\left(\frac{c}{\sqrt{T - T_c}}\right)$$

характерная сигнатура перехода БКТ

## Континуум

$$S = \int d^2x (\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4),$$

- $\mu^2$  - масса поля,  $\lambda$  - константа взаимодействия
- Плотность сверхтекучей жидкости  $\langle |\phi|^2 \rangle \simeq \frac{\mu^2}{2\lambda}$
- Эффективная жесткость фазы:  $K_{MF} = \frac{\mu^2}{\lambda}$
- Точка БКТ-перехода  $\lambda_c^{MF} = \frac{\pi \mu^2}{2}$

## Решётка

$$S = \sum_{\langle ij \rangle} |\phi_i - \phi_j|^2 + \sum_i (-\mu_0^2 |\phi_i|^2 + \lambda_0 |\phi_i|^4),$$

- $\mu_0 = a\mu$ ,  $\lambda_0 = a^2\lambda$  - безразмерные параметры теории
- индексы  $i, j$  нумеруют узлы решетки
- $\langle i, j \rangle$  - подразумевает суммирование по ближайшим соседям
- Периодические ГУ, квадратная решётка.

# Однопетлевая поправка к фазовой жёсткости

## Идея

- XY-модель возникает как эффективная теория фазы комплексного поля  $\phi$ .
- Модуль поля можно проинтегрировать, получая поправки к фазовой жёсткости.

## Среднеполевое значение

$$K_{MF} = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

## Результат

$$K = \frac{\mu^2}{\lambda} - \frac{\mathcal{K}\left(\frac{2}{2+\mu^2}\right)}{(2 + \mu^2)\pi} \quad (1)$$

## Следствие

учёт однопетлевой поправки значительно улучшает согласие аналитического предсказания с результатами Монте-Карло

# Параметры численного моделирования Монте-Карло

- Действие:

$$S = \sum_{\langle ij \rangle} |\phi_i - \phi_j|^2 + \sum_i (-\mu_0^2 |\phi_i|^2 + \lambda_0 |\phi_i|^4),$$

- Алгоритм: Metropolis MC.
- Размеры решётки:  $64^2$  и  $128^2$ .
- Оптимизация: чётно-нечётное обновление (even-odd) для ускорения с использованием GPU.

## Измеряемые величины

- $\langle |\phi|^2 \rangle$  (плотность)
- вихревая плотность
- корреляционная функция  $C(s)$  и корреляционная длина  $\xi$

# Определение вихрей на плакетах

- Фазовые разности по рёбрам плакета:  
 $\Delta\theta_{ab} \in (-\pi, \pi)$ .

- Намотка:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} \Delta\theta$$

- Возможные значения:  $v \in \{-1, 0, 1\}$   
(антивихрь/нет/вихрь).

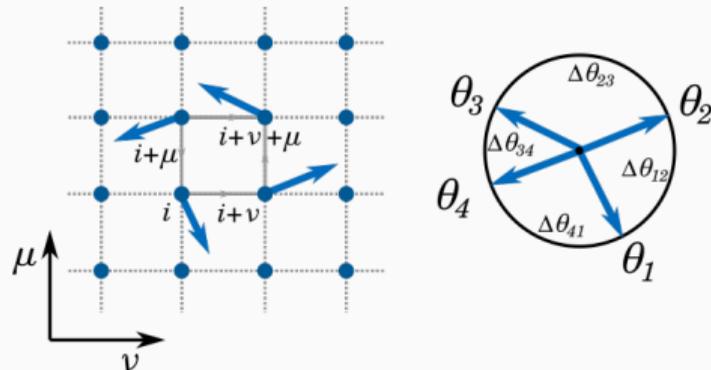


Рис. 1: Схема вихря на квадратной решётке.

## Корреляционная функция

$$C(s) = \frac{1}{2N_s N_t} \sum_{i, \hat{\nu}} \eta_i \eta_{i+s\hat{\nu}} \cos(\theta_i - \theta_{i+s\hat{\nu}})$$

## Фит с учётом периодических ГУ

$$C(s) = a \left( e^{-s/\xi} + e^{-(L-s)/\xi} \right) + b$$

- В неупорядоченной фазе наблюдается экспоненциальный спад, корректное извлечение  $\xi$ .
- В квазидальнем порядке спад степенной, экспоненциальный фит начинает сыпаться.

## Результаты моделирования: квадрат модуля поля

- $\langle |\phi|^2 \rangle$  хорошо согласуется с предсказанием теории среднего поля в широком диапазоне параметров.

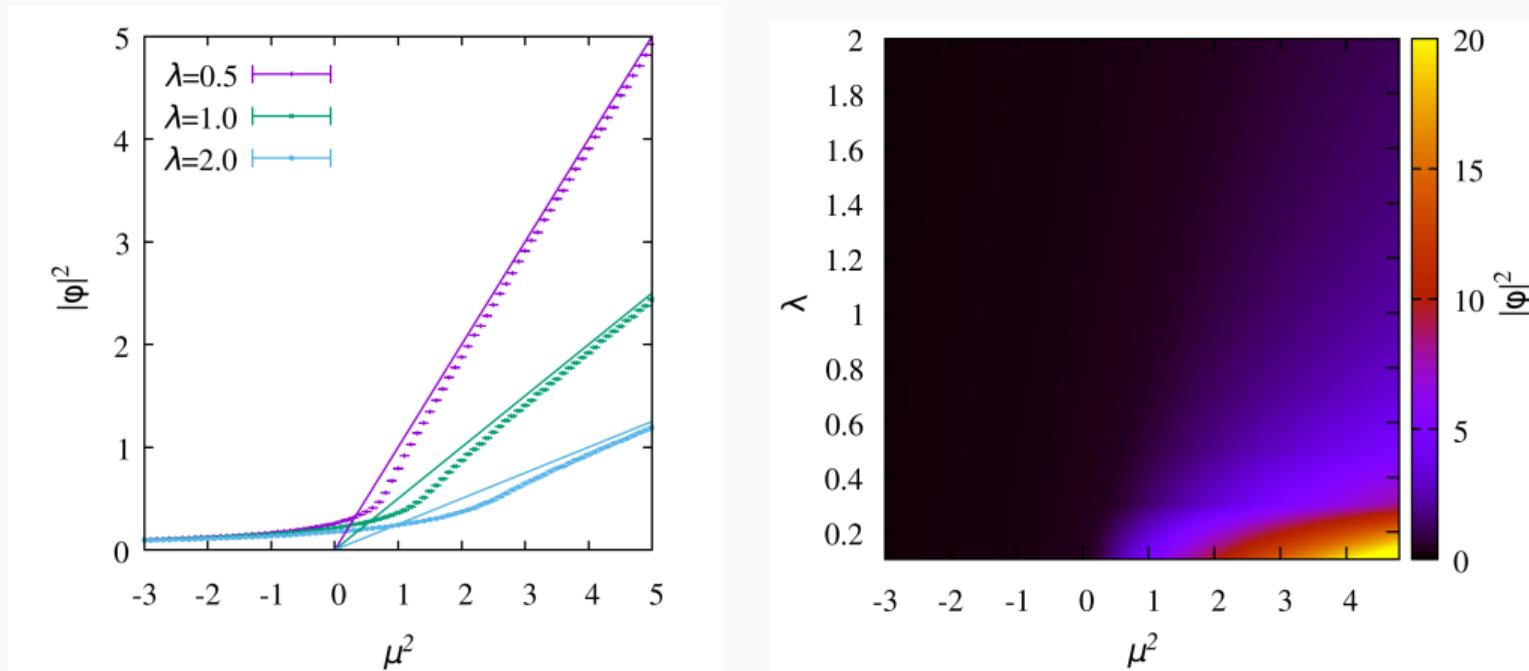


Рис. 2:  $\langle |\phi|^2 \rangle = \langle |\phi|^2 \rangle (\mu^2, \lambda)$

# Результаты моделирования: вихри и фазы

- При больших  $\mu^2$  вихри связаны в пары
- При малых  $\mu^2$  распаривание и газ вихрей.
- Плотность вихрей меняется плавно  $\Rightarrow$  не лучший индикатор точки перехода.

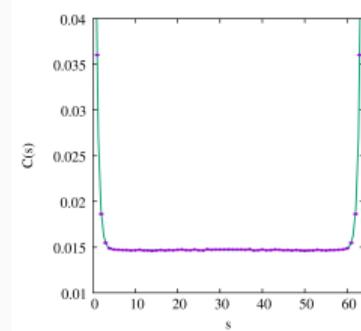
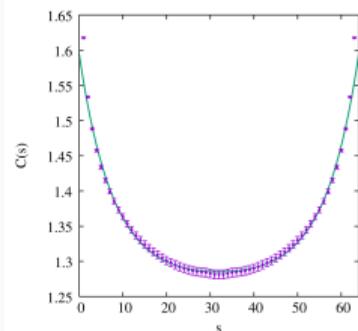


Рис. 4: Корреляторы в различных фазах

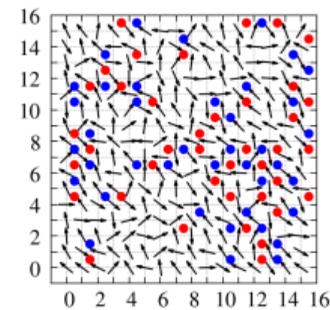
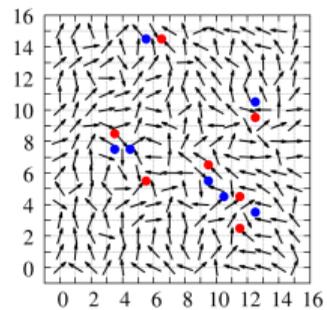


Рис. 5: Конфигурации вихрей в различных фазах 10/14

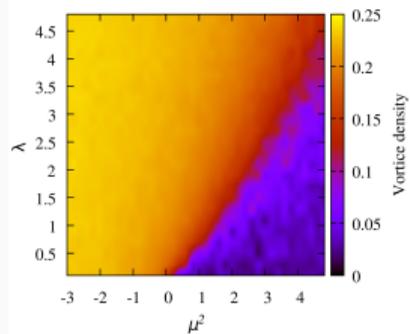
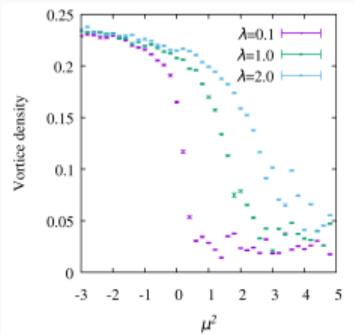
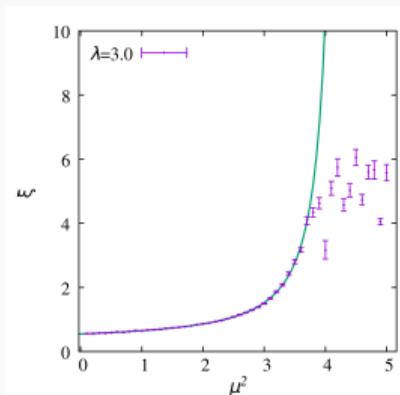
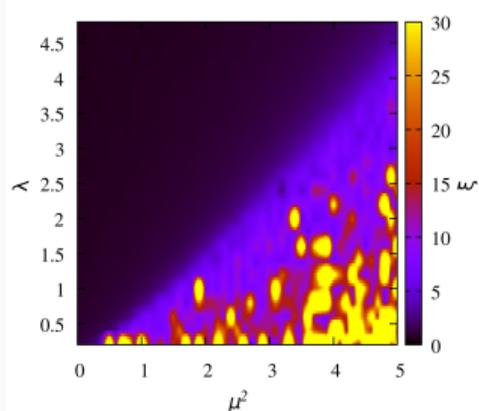
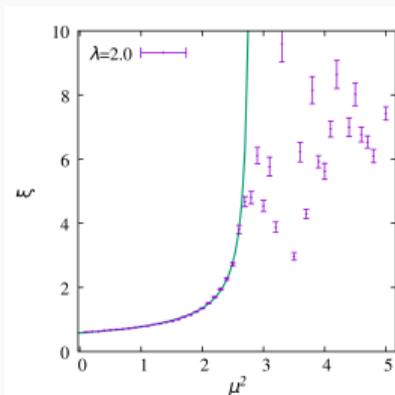


Рис. 3: Абсолютная плотность вихрей

## Ключевая наблюдаемая зависимость

$$\xi \sim \exp\left(\frac{c}{\sqrt{\mu_{\text{crit}}^2 - \mu^2}}\right)$$

- БКТ-скейлинг воспроизводится на решетках небольшого размера.
- Флуктуации модуля подавляют конечномерные эффекты, типичные для XY.



# Фазовая диаграмма

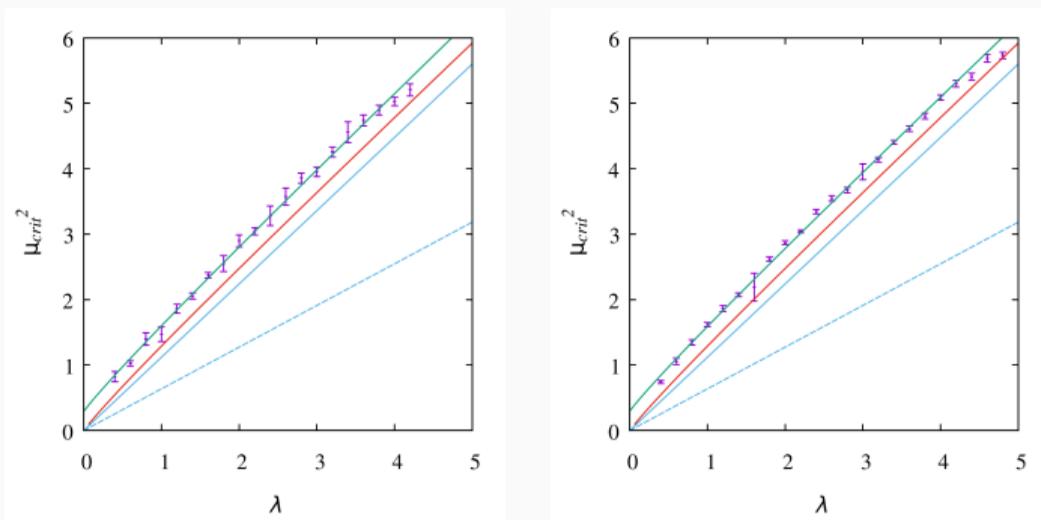


Рис. 7: Фазовая диаграмма и сравнение аппроксимаций (слева решетка  $64^2$ , справа решетка  $128^2$ ).

- **зелёная линия** — фит фазовой границы
- **голубая пунктирная** — mean-field
- **голубая сплошная** — учёт перенормировки критической жёсткости
- **красная линия** — результат с однопетлевой поправкой

$$\lambda_c(\mu^2) = \frac{\mu^2 + d}{K_{\text{crit}} + \frac{\kappa\left(\frac{2}{2+\mu^2+d}\right)}{\pi(2+\mu^2+d)}}$$

$L$	$K_{\text{crit}}$	$d$
64	$1.139 \pm 0.016$	$-0.29 \pm 0.04$
128	$1.124 \pm 0.012$	$-0.29 \pm 0.03$

## Параметры фита

- $K_{\text{crit}}$  — критическая фазовая жёсткость
- $d$  — эффективная поправка, учитывающая высшие петли

- БКТ-переход в комплексной  $\phi^4$  виден отчётливо на  $64^2$  и  $128^2$ .
- Корреляционная длина демонстрирует универсальный БКТ-скейлинг.
- Динамика модуля снижает конечномерные эффекты по сравнению с чистой XY-моделью.
- Эффективная XY-теория работает **количественно**; однопетлевая поправка улучшает совпадение.