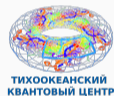


Переход Березинского–Костерлица–Таулесса в 2D сверхтекучей жидкости



А.М. Бегун



Дальневосточный федеральный университет
Тихоокеанский квантовый центр

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект Государственного задания № FZNS-2024-0002.

Теорема Мермина–Вагнера

Формулировка

В системах с непрерывной симметрией и короткодействующим взаимодействием спонтанное нарушение симметрии в $d \leq 2$ при конечной температуре невозможно.

Причина: флуктуации голдстоуновской моды

$$S = \frac{K}{2} \int d^2x (\nabla\theta)^2$$

$$\langle\theta^2\rangle \sim \int \frac{d^2k}{k^2} \rightarrow \infty$$

Следствие

- истинный дальний порядок отсутствует
- может существовать квазидальний порядок

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle \sim e^{-x/\xi}$$

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle \sim |x|^{-\eta}$$

Переход Березинского–Костерлица–Таулесса

Механизм перехода: распаривание вихрей

Низкие температуры ($T < T_c$)

- вихри образуют связанные пары
- квазидальний порядок

Корреляционная функция

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim |x|^{-\eta}$$

степенной спад

Высокие температуры ($T > T_c$)

- пары вихрь–антивихрь распадаются
- газ свободных вихрей

Корреляционная функция

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim e^{-x/\xi}$$

экспоненциальный спад

Корреляционная длина

$$\xi \sim \exp\left(\frac{c}{\sqrt{T - T_c}}\right)$$

характерная сигнатура перехода БКТ

Континуум

$$S = \int d^2x (\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4),$$

- μ^2 - масса поля, λ - константа взаимодействия
- Плотность сверхтекучей жидкости $\langle |\phi|^2 \rangle \simeq \frac{\mu^2}{2\lambda}$
- Эффективная жесткость фазы: $K_{MF} = \frac{\mu^2}{\lambda}$
- Точка БКТ-перехода $\lambda_c^{MF} = \frac{\pi \mu^2}{2}$

Решётка

$$S = \sum_{\langle ij \rangle} |\phi_i - \phi_j|^2 + \sum_i (-\mu_0^2 |\phi_i|^2 + \lambda_0 |\phi_i|^4),$$

- $\mu_0 = a\mu$, $\lambda_0 = a^2\lambda$ - безразмерные параметры теории
- индексы i, j нумеруют узлы решетки
- $\langle i, j \rangle$ - подразумевает суммирование по ближайшим соседям
- Периодические ГУ, квадратная решётка.

Однопетлевая поправка к фазовой жёсткости

Идея

- XY-модель возникает как эффективная теория фазы комплексного поля ϕ .
- Модуль поля можно проинтегрировать, получая поправки к фазовой жёсткости.

Среднеполевое значение

$$K_{MF} = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Результат

$$K = \frac{\mu^2}{\lambda} - \frac{\mathcal{K}\left(\frac{2}{2+\mu^2}\right)}{(2 + \mu^2)\pi} \quad (1)$$

Следствие

учёт однопетлевой поправки значительно улучшает согласие аналитического предсказания с результатами Монте-Карло

Параметры численного моделирования Монте-Карло

- Действие:

$$S = \sum_{\langle ij \rangle} |\phi_i - \phi_j|^2 + \sum_i (-\mu_0^2 |\phi_i|^2 + \lambda_0 |\phi_i|^4),$$

- Алгоритм: Metropolis MC.
- Размеры решётки: 64^2 и 128^2 .
- Оптимизация: чётно-нечётное обновление (even-odd) для ускорения с использованием GPU.

Измеряемые величины

- $\langle |\phi|^2 \rangle$ (плотность)
- вихревая плотность
- корреляционная функция $C(s)$ и корреляционная длина ξ

Определение вихрей на плакетах

- Фазовые разности по рёбрам плакета:
 $\Delta\theta_{ab} \in (-\pi, \pi)$.

- Намотка:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{\square} \Delta\theta$$

- Возможные значения: $v \in \{-1, 0, 1\}$
(антивихрь/нет/вихрь).

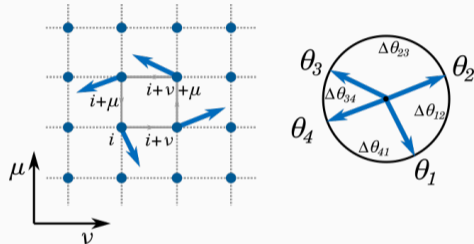


Рис. 1: Схема вихря на квадратной решётке.

Корреляционная функция

$$C(s) = \frac{1}{2N_s N_t} \sum_{i, \hat{\nu}} \eta_i \eta_{i+s\hat{\nu}} \cos(\theta_i - \theta_{i+s\hat{\nu}})$$

Фит с учётом периодических ГУ

$$C(s) = a \left(e^{-s/\xi} + e^{-(L-s)/\xi} \right) + b$$

- В неупорядоченной фазе наблюдается экспоненциальный спад, корректное извлечение ξ .
- В квазидальнем порядке спад степенной, экспоненциальный фит начинает сыпаться.

Результаты моделирования: квадрат модуля поля

- $\langle |\phi|^2 \rangle$ хорошо согласуется с предсказанием теории среднего поля в широком диапазоне параметров.

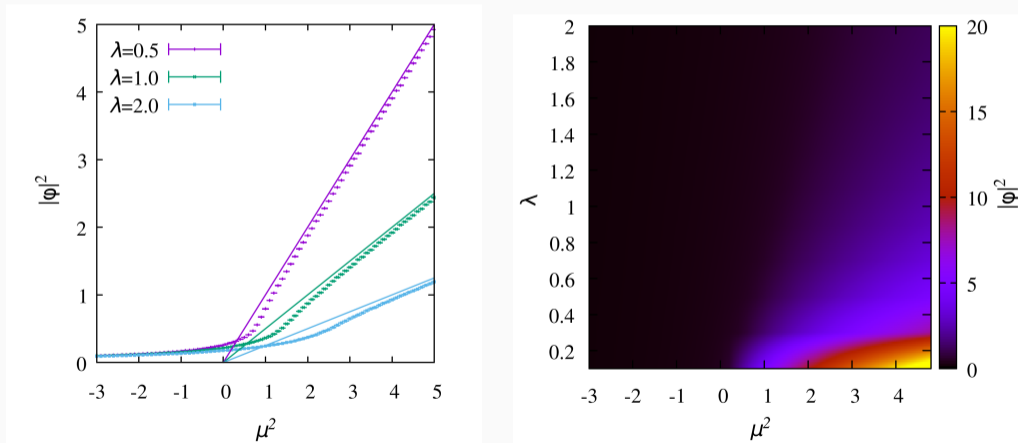


Рис. 2: $\langle |\phi|^2 \rangle = \langle |\phi|^2 \rangle (\mu^2, \lambda)$

Результаты моделирования: вихри и фазы

- При больших μ^2 вихри связаны в пары
- При малых μ^2 распаривание и газ вихрей.
- Плотность вихрей меняется плавно \Rightarrow не лучший индикатор точки перехода.

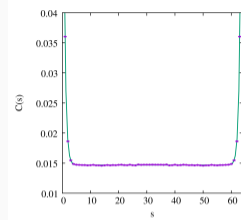
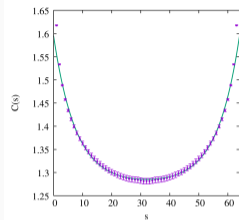


Рис. 4: Корреляторы в различных фазах

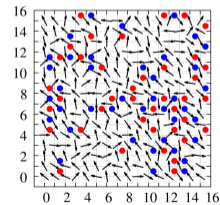
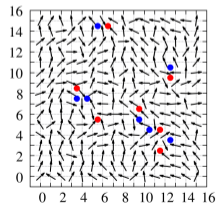


Рис. 5: Конфигурации вихрей в различных фазах

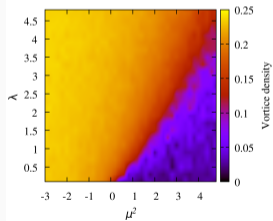
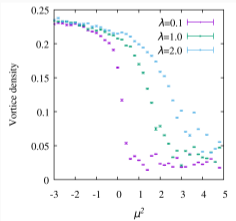
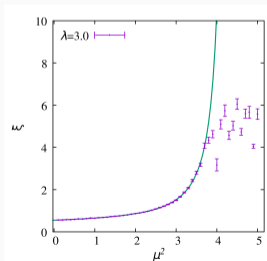
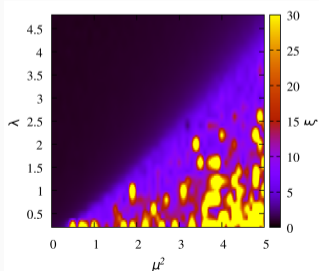
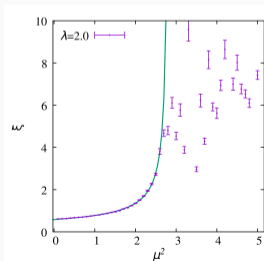


Рис. 3: Абсолютная плотность вихрей

Ключевая наблюдаемая зависимость

$$\xi \sim \exp\left(\frac{c}{\sqrt{\mu_{\text{crit}}^2 - \mu^2}}\right)$$

- БКТ-скейлинг воспроизводится на решетках небольшого размера.
- Флуктуации модуля подавляют конечномерные эффекты, типичные для XY.



Фазовая диаграмма

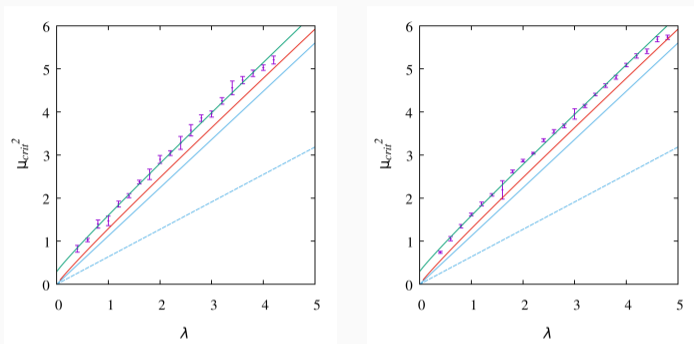


Рис. 7: Фазовая диаграмма и сравнение аппроксимаций (слева решетка 64^2 , справа решетка 128^2).

- **зелёная линия** — фит фазовой границы
- **голубая пунктирная** — mean-field
- **голубая сплошная** — учёт перенормировки критической жёсткости
- **красная линия** — результат с однопетлевой поправкой

$$\lambda_c(\mu^2) = \frac{\mu^2 + d}{K_{\text{crit}} + \frac{\kappa\left(\frac{2}{2+\mu^2+d}\right)}{\pi(2+\mu^2+d)}}$$

L	K_{crit}	d
64	1.139 ± 0.016	-0.29 ± 0.04
128	1.124 ± 0.012	-0.29 ± 0.03

Параметры фита

- K_{crit} — критическая фазовая жёсткость
- d — эффективная поправка, учитывающая высшие петли

- БКТ-переход в комплексной ϕ^4 виден отчётливо на 64^2 и 128^2 .
- Корреляционная длина демонстрирует универсальный БКТ-скейлинг.
- Динамика модуля снижает конечномерные эффекты по сравнению с чистой XY-моделью.
- Эффективная XY-теория работает **количественно**; однопетлевая поправка улучшает совпадение.