Анзац Кассини в модели Скирма: разрыв сферического скирмиона

Герасименюк Николай Владимирович

Тихоокеанский Квантовый Центр, ДВФУ

Ткачёв Олег Григорьевич
Корнеев Анатолий Анатольевич
Молочков Александр Валентинович

Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН
10 - 13 марта 2026 г.

Работа выполнена при поддержке гос.задания FZNS-2024-0002

Авторы


HaRP
Russia-Japan Project "Human Resource Development Platform for Japan Russia Economic Cooperation and Personnel Exchange (HaRP)" by Hokkaido Univ. and Niigata Univ.
(1) Workshop at RCNP on
"Development of simulation by GPU for the study of quark-hadron matter at high temperatures and densities",
Research Center for Nuclear Physics, Osaka University, Nov 20-23, 2018
(2) Workshop at Vladivostok on
"Hadrons and dense matter from QCD", January 28-29, 2019
ВЫХОД
EXIT

Предпосылки: дуализм частиц и поля

Корпускулярный подход: взаимодействие как обмен частицей.
Хроника событий:

- Ядро состоит из протонов и нейтронов (до 1930г.)
- Мезоны: 200-300 масс электрона (Х.Юкава 1935г.)
- В 1947г. открыт π-мезон с $\mathrm{m}_\pi \approx 270\mathrm{m}_\mathrm{e} \approx 138\mathrm{MeV}$

Полевой подход: пионное поле — это аналог магнитного поля, но только для ядерных сил.
Тони Скирм: Могут ли частицы быть проявлением пионного поля, свернувшегося в устойчивую структуру, обусловленную его топологией?

Модель Гелл-Манна — Леви

Лагранжиан σ-модели (1960г.)

Gell-Mann, M., Lévy, M. The axial vector current in beta decay. Nuovo Cim 16, 705–726 (1960)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - V(\sigma, \vec{\pi}), \text{ где } V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - f_\pi^2)^2$$

Изовектор: $\vec{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\} \quad \rightarrow \quad \{\pi^0 = \pi_3, \quad \pi^\pm = (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}\}$
Вакуум: $\langle \sigma \rangle = f_\pi, \quad \langle \vec{\pi} \rangle = 0$
При $\lambda \rightarrow \infty$ связь между полями становится жёсткой: $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2$

$$\Sigma = \sigma \cdot \mathrm{I} + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}, \text{ где } \tau \ - \text{ матрицы Паули.}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma) = (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2, \qquad \det(\Sigma) = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} f_\pi^2$$

Лагранжиан Скирма:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 = \frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) + \mathcal{L}_4, \qquad \text{где} \quad \Sigma = f_\pi U \ \text{ и } \ \det(U) = 1$$

В случае $\mathcal{L}_2$ имеются топологически нетривиальные решения, но они нестабильны!

Модель Скирма

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\left(L_\mu L_\mu\right) + \frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}\left[L_\mu, L_\nu\right]^2, \text{ где } L_\mu = \partial_\mu U U^+$$

Skyrme, Tony Hilton Royle. "A unified field theory of mesons and baryons."Nuclear Physics 31 (1962): 556-569.

Модель инвариантна относительно $U(\vec{x}) \to AU(\vec{x})B^+$ для $A, B \in SU(2)$

Параметризация матриц $U(\vec{x}, t)$:

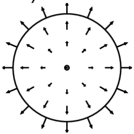
$$U(\vec{x}, t) = \exp\left\{i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(\vec{x}, t)/f_\pi\right\} = \cos\overbrace{F(\vec{x}, t)}^{|\vec{\pi}|/f_\pi} + i\left(\vec{\tau}\cdot\overbrace{\vec{N}(\vec{x}, t)}^{\vec{\pi}/|\vec{\pi}|}\right)\sin F(\vec{x}, t)$$

Топологический ток $\equiv$ барионный ток:

G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, Nuclear Physics B 228, 552 (1983).

$$J_\alpha^B = -\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left(L_\mu L_\nu L_\rho\right) \xrightarrow{U=e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}}} J_\alpha^B = -\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\left(\left[\partial_\mu\vec{N}\times\partial_\nu\vec{N}\right]\vec{N}\right)\partial_\rho F\sin^2 F$$

Плотность лагранжиана в терминах переменных $\{F(\vec{x}, t), \vec{N}(\vec{x}, t)\}$:

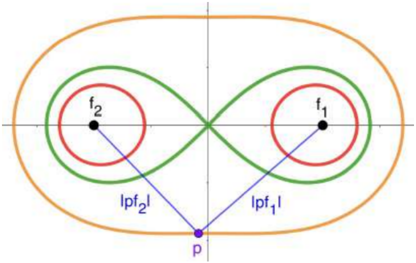


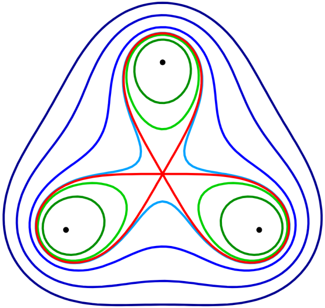
$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{f_\pi^2}{2}\left\{\partial_\mu F\partial_\mu F + \left(\partial_\mu\vec{N}\cdot\partial_\mu\vec{N}\right)\sin^2 F\right\} \\ & -\frac{1}{2e^2}\left\{\left[\partial_\mu\vec{N}\times\partial_\nu\vec{N}\right]^2\sin^2 F + 2\left(\partial_\mu\vec{N}\cdot\partial_\nu\vec{N}\right)\partial_\alpha F\partial_\beta F\Delta_{\alpha\beta\mu\nu}\right\}\sin^2 F\end{aligned}$$

где $\Delta_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}$.

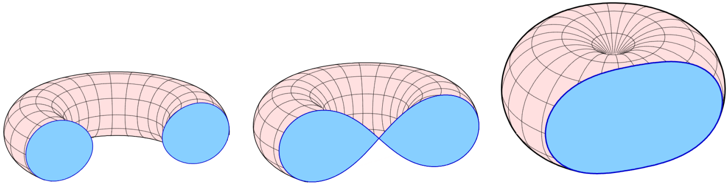
Далее требуется анзац на функцию F!

Анзац Кассини

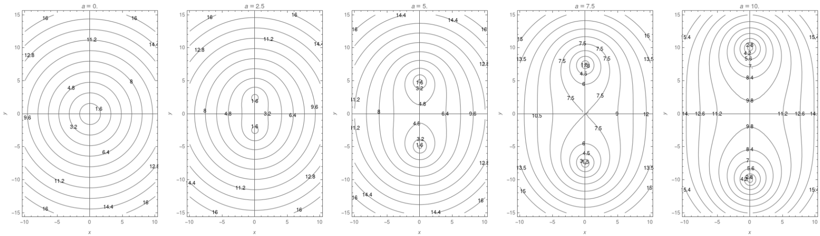




$$\sqrt{\sqrt{(x^2+(y-a)^2)}\sqrt{(x^2+(y+a)^2)}} = \mathrm{Const}$$



Система координат



Рыбаков Ю.П. Моделирование взаимодействия топологических солитонов. Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science (2004)

$$\left\{P^2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-a)^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+a)^2},\ \Phi=\operatorname{atan}\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\ \mathcal{Z}=x_1^2+x_2^2+x_3^2\right\}$$

Замена переменных: $P>0,\ 0\le\Phi<2\pi,\ \mathcal{Z}>0$

$$\left\{x_1=\frac{\sqrt{P^4-(a^2-\mathcal{Z})^2}}{2a}\cos\Phi,\ x_2=\frac{\sqrt{P^4-(a^2-\mathcal{Z})^2}}{2a}\sin\Phi,\ x_3=\pm\frac{\sqrt{(a^2+\mathcal{Z})^2-P^4}}{2a}\right\}$$

Якобиан: $J_\pm=\pm\dfrac{P^3}{2a\sqrt{(a^2\pm\mathcal{Z})^2-P^4}},\ \mathcal{Z}\in\left[|a^2\mp P^2|,|a^2\pm P^2|\right]$ для $x_3\gtrless 0$

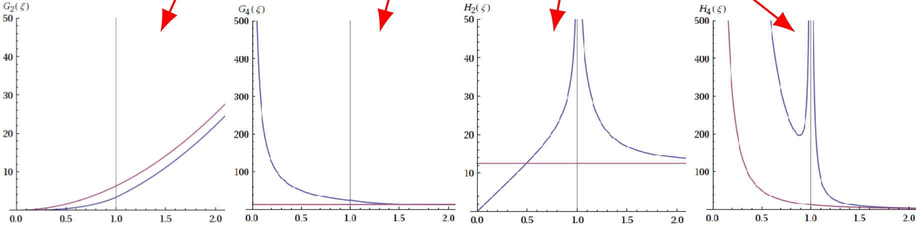
Лагранжиан

Безразмерные переменные:
$\xi = ef_\pi P$ и $\eta = ef_\pi a$.

$$L = \int_0^\infty dP \int_0^{2\pi} d\Phi \left(\int_{|a^2-P^2|}^{a^2+P^2} J_+ \mathcal{L} d\mathcal{Z} + \int_{a^2+P^2}^{|a^2-P^2|} J_- \mathcal{L} d\mathcal{Z} \right)$$

В новой системе Лагранжиан модели сводится к неизвестной функции $F = F(\xi)$:

$$L = -\frac{f_\pi}{e}\int_0^\infty d\xi \left[\underbrace{G_2(\xi)}_{(\partial_\mu F \partial_\mu F)} F'(\xi)^2 + \left(\overbrace{G_4(\xi)}^{(\partial_\mu \vec{N} \partial_\nu \vec{N})\partial_\alpha F \partial_\beta F \Delta_{\alpha\beta\mu\nu}} F'(\xi)^2 + \overbrace{H_2(\xi)}^{(\partial_\mu \vec{N} \partial_\mu \vec{N})} + \frac{1}{2} \underbrace{H_4(\xi)}_{[\partial_\mu \vec{N} \times \partial_\nu \vec{N}]^2} \sin^2 F(\xi) \right) \sin^2 F(\xi) \right]$$



Предел $\eta \to 0$: $\left\{ G_2(\xi) = 2\pi\xi^2, H_2(\xi) = 4\pi, G_4(\xi) = 4\pi, H_4(\xi) = \frac{4\pi}{\xi^2} \right\}$

Skyrme, T. H. R. (1961). A non-linear field theory. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 260(1300), 127-138.

Уравнение движения

Будем искать решения с минимальной статической массой $M = -L$
Уравнение Эйлера — Лагранжа для функции $F = F(\xi)$:

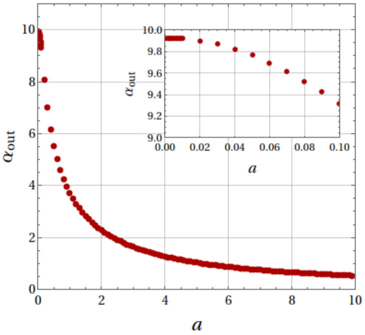
$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \left[G_2(\xi) + G_4(\xi)\sin^2 F(\xi)\right] F''(\xi) + \left[G_2'(\xi) + G_4'(\xi)\sin^2 F(\xi)\right] F'(\xi) \\
&-\; \left[H_2(\xi) + H_4(\xi)\sin^2 F(\xi) - G_4(\xi)F'(\xi)^2\right] \sin F(\xi)\cos F(\xi)
\end{aligned}
$$

Решение уравнения находим численно!

Поведение в окрестности особых точек:

$$
\begin{aligned}
F(\xi)|_{\xi\to 0} \;&\simeq\; n_0\pi \pm \alpha_{int}\xi^2 \\
F(\xi)|_{\xi\to \eta-0} \;&\simeq\; n_\eta\pi \pm \beta_{int}(\eta - \xi) \\
F(\xi)|_{\xi\to \eta+0} \;&\simeq\; n_\eta\pi \pm \alpha_{out}(\xi - \eta) \\
F(\xi)|_{\xi\to \infty} \;&\simeq\; \beta_{out}/\xi^2
\end{aligned}
$$

где α_{int}, β_{int}, α_{out} и β_{out} – константы.



Барионный заряд

$$Q(P) = \int\limits_0^{2\pi} d\Phi \left(\int\limits_{|a^2-P^2|}^{a^2+P^2} J_+ \, J_0^B \, d\mathcal{Z} + \int\limits_{a^2+P^2}^{|a^2-P^2|} J_- \, J_0^B \, d\mathcal{Z} \right) = \begin{cases} Q_{\text{int}}^{(+)}(P) + Q_{\text{int}}^{(-)}(P), & P < a \\ Q_{\text{out}}(P), & P \geq a \end{cases}$$

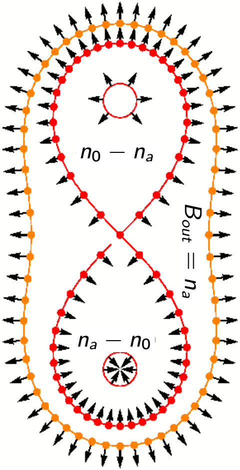
$$J_0^B = -\frac{1}{12\pi} \frac{3\left(\mathcal{Z} + a^2\right)\left(3\mathcal{Z}^2 - P^4 + a^4\right)}{\mathcal{Z}^{3/2} P^5} \sin^2 F(P) F'(P)$$

$$Q_{out}(P) = Q_{int}^{(+)}(P) = -Q_{int}^{(-)}(P) = -\frac{2}{\pi} \sin^2 F(P) F'(P)$$

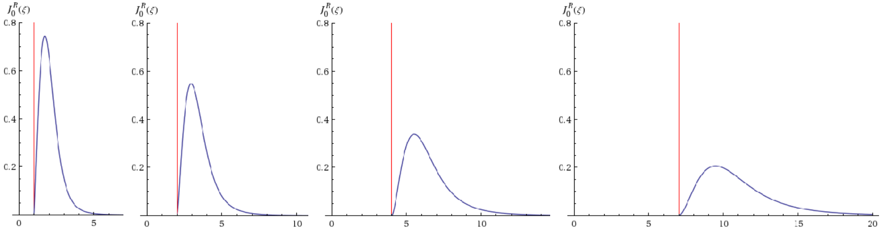
Результат зависит только от значений
$F(0) = n_0\pi$, $F(a) = n_a\pi$ и $F(P)|_{P\to\infty} = 0$.
Выражение для суммарного барионного заряда:

$$B = \int\limits_0^{\infty} Q(P) dP = \overbrace{B_{int}^{(+)}}^{n_0 - n_a} + \overbrace{B_{int}^{(-)}}^{-(n_0 - n_a)} + B_{out} = B_{out} = n_a$$

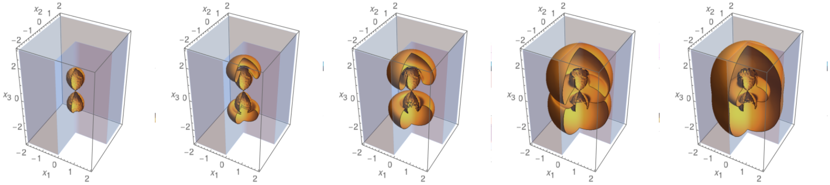
Далее рассматриваем решения с $B = 1$, то есть
$n = n_0 = n_\eta = 1$



Плотность барионного заряда



Плотность барионного заряда $J_{\mathbf{0}}^{B}(\xi)$ в области $\xi \geq \eta$ для нескольких значений $\eta = \{1, 2, 4, 7\}$.



Поверхности постоянной плотности для $|J_{\mathbf{0}}^{B}(\vec{x})| = \{0.085,\ 0.04,\ 0.02,\ 0.0085,\ 0.006\}$ при $\eta = 1$.

Статическая масса

Рассмотрим изменение статической массы скирмионной конфигурации от расстояния между центрами инерции. Если выбрать направления вдоль продольной оси симметрии овалов, получаем значение для центра масс:

$$z_c = \frac{\int z\,\mathcal{L}(\vec{x})\,dV}{\int \mathcal{L}(\vec{x})\,dV}$$

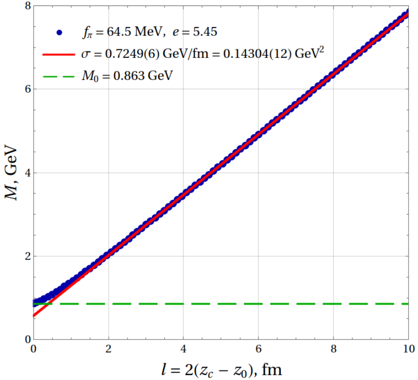
Параметры Лагранжиана:
$f_\pi = 64.5$ MeV, $e = 5.45$

G.S.Adkins, C.R.Nappi, and E.Witten, Nuclear Physics B 228, 552 (1983).

Функция подгонки: $y = \alpha + \sigma\ell$

Оценка параметров:
$\sigma \simeq 34.38 f_\pi^2$ и $M_\circ \approx 863 MeV$

$\sigma \approx 0.14 GeV^2$



В статическом случае в кирально-инвариантной модели коэффициент σ не зависит от геометрического параметра e, входящего в лагранжиан Скирма!

Заключение

Было показано, что при растяжении сферического скирмиона в рамках анзаца Кассини образуется особое состояние:

- Внутри $\xi < \eta$ и $x_3 > 0$ возникает скирмион с барионным зарядом $B_{int}^{(+)}$;
- В области $\xi < \eta$ и $x_3 < 0$ возникает антискирмион с $B_{int}^{(-)} = -B_{int}^{(+)}$;
- В области $\xi \geq \eta$ скирмион с барионным зарядом B_{out} сохраняется.

Суммарный барионный заряд внутри: $B_{int} = B_{int}^{(+)} + B_{int}^{(-)} = 0$
Общий барионный заряд определяется только внешней областью: $B = B_{out}$.

Энергия конфигурации с $B = 1$ показывает, что уже при растяжении на $1\mathrm{fm}$ наблюдается линейная зависимость массы от расстояния между фокусами ℓ. Полученная зависимость очень похожа на поведение струны.