

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ
НА УРОВНЕ НАБЛЮДАЕМЫХ В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Василий Пушкарёв

МИАН им. В.А. Стеклова

[Д. Агеев, В. Пушкарёв, arXiv:2507.18746]

11 марта 2026

ПЛАН

Результат: универсальность теории случайных матриц, лежащая в основе диагностики квантового хаоса, может возникать при определённых условиях в свободных теориях (неравновесность, граничные условия).

1. Хаос в классической механике: экспонента Ляпунова
2. Сложности обобщения классического определения на квантовый случай: диагностики квантового хаоса
3. Спектральные диагностики: распределение флуктуаций уровней, спектральный форм-фактор, гипотеза Бохигаса-Джианнони-Шмита
4. Универсальность теории случайных матриц в скалярной теории поля:
 - 4.1 Неравновесная динамика после локальных и глобальных квенчей
 - 4.2 Статистика экстремумов корреляционных функций
 - 4.3 Спектральный форм-фактор и его обобщения

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

- ▶ Хаотичность динамики характеризует экспоненциальная степень чувствительности системы к начальным данным.
- ▶ Если две изначально инфинитезимально близкие фазовые траектории на достаточно больших временах оказываются экспоненциально далеки друг от друга, то предсказуемость теряется, несмотря на то, что система остаётся детерминированной («эффект бабочки»).
- ▶ Математический критерий хаотичности выражается в положительности экспоненты Ляпунова,

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta, t)}{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \delta, 0)} \right], \quad (1)$$

где d — расстояние, определённое в фазовом пространстве.

ДИАГНОСТИКИ КВАНТОВОГО ХАОСА

Прямой перенос определения хаотической динамики на квантовый случай затруднён (отсутствие понятия фазовой траектории, сохранение скалярного произведения состояний унитарной эволюцией). Однако было обнаружено:

- ▶ статистика энергетических уровней квантовых систем, динамика которых в квазиклассическом пределе хаотична, совпадает со статистикой собственных значений гауссовых ансамблей случайных матриц [Bohigas, Gianonni, Schmidt, 1984];
- ▶ неупорядоченные во времени корреляторы [Larkin, Ovchinnikov, 1969], характеризуются периодом экспоненциального роста на промежуточных временах для быстрых скрэмблеров [Maldacena, Shenker, Stanford, arXiv:1503.01409].

Это позволяет выделить так называемые **диагностики квантового хаоса** (вместо определения): характеристики, классифицирующие системы по наблюдаемым проявлениям, согласующимся в квазиклассическом пределе с хаотической динамикой.

СТАТИСТИКА РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ

► Плотность вероятности для:

- последовательных разностей соседних энергетических уровней, $\delta_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$, или
- их отношений, $r_n = \delta_{n+1}/\delta_n$,

сравнивается с предсказаниями теории случайных матриц для гауссовых ансамблей [Bohigas, Giannini, Schmit, 1984], [Atas et al., 2013].

► Обобщённая статистика расстояний: расстояния между энергетическими уровнями заменяется расстояниями между пиками амплитуды рассеяния сильно-возбуждённых струнных амплитуд [Bianchi et al., arXiv:2207.13112].

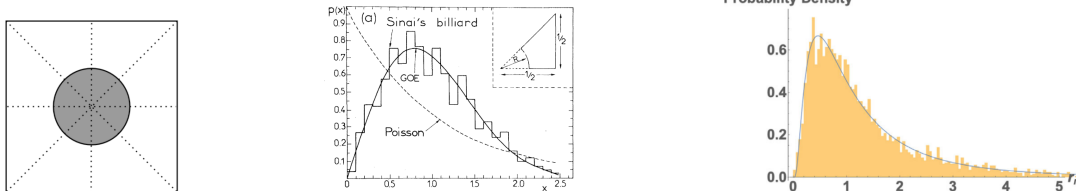


Рис. (Слева) Биллиард Синая, (в центре) распределение расстояний между уровнями для гауссового ортогонального ансамбля и биллиарда Синая, из [Bohigas, Giannini, Schmit, 1984], и (справа) обобщённая статистика расстояний, из [Bianchi et al., arXiv:2207.13112].

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР

- ▶ Спектральный форм-фактор (SFF) — Фурье-преобразование двухуровневой корреляционной функции $\rho^{(2)}(\lambda_i, \lambda_j)$,

$$g(t) = \sum_{i,j=1}^N \int d\lambda_i d\lambda_j \rho^{(2)}(\lambda_i, \lambda_j) e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)t} = g_0 \sum_{i,j=1}^N e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)t}, \quad (2)$$

где $\{\lambda_i\}$ собственные значения Гамильтониана.

- ▶ Для гауссовых ансамблей случайных матриц, SFF демонстрирует универсальное поведение на больших временах — структуру «дип-рэмп-плато» [Cotler et al., arXiv:1611.04650].

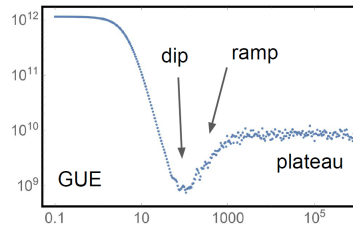


Рис. SFF для гауссового унитарного ансамбля, из [Dyer, Gur-Ari, arXiv:1611.04592].

МОДЕЛЬ

- ▶ Рассмотрим свободную скалярную теорию поля с ненулевой массой в конечном объёме на фоне 1 + 1-мерного плоского пространства,

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d\tau \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right), \quad (3)$$

пространственная координата является периодической, $x \in S^1$.

- ▶ Неравновесное состояние может быть подготовлено вставкой локального оператора (операторный локальный квенч) [Nozaki, Numasawa, Takayanagi, arXiv:1401.0539]

$$|\Psi(t)\rangle \sim e^{-iH(t-t_0)} e^{-\varepsilon H} O(t_0, x_0) |0\rangle, \quad (4)$$

где H — Гамильтониан, ε — инфинитезимальный параметр УФ-регуляризации.

МОДЕЛЬ

- ▶ Выберем в качестве оператора, создающего возмущение, полевой оператор ϕ и определим одновременную двухточечную корреляционную функцию с вычтенным равновесным вкладом $G_{\text{eq}}(x) \equiv \langle 0|\phi(t, x)\phi(t, 0)|0\rangle$, см. [Ageev, Belokon, Pushkarev, arXiv:2205.12290]

$$G_{\text{loc}}(t, x) \equiv \frac{\langle 0|\phi(i\varepsilon, 0)\phi(t, x)\phi(t, 0)\phi(-i\varepsilon, 0)|0\rangle}{\langle 0|\phi(i\varepsilon, 0)\phi(-i\varepsilon, 0)|0\rangle} - G_{\text{eq}}(x). \quad (5)$$

- ▶ Двухточечная корреляционная функция после локального кванча в конечном объеме рассчитывается по равновесной евклидовой двухточечной корреляционной функции

$$\langle \phi(\tau, x)\phi(\tau_0, x_0) \rangle = \frac{1}{AL} \sum_n \frac{e^{-\omega_n \sqrt{(\tau-\tau_0)^2 + ik_n(x-x_0)}}}{2\omega_n}, \quad (6)$$

где $k_n = 2\pi n/L$ — дискретные пространственные моды, связанные с временными модами дисперсионным соотношением $\omega_n = \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} + m^2}$.

МОДЕЛЬ

- ▶ Глобальное неравновесное возбуждение может быть подготовлено путём наложения граничных условий в интеграле по путям на полосе конечной ширины τ_0 в евклидовом времени (граничный глобальный кванч) [Sotiriadis, Cardy, arXiv:1002.0167].
- ▶ Регуляризованная неравновесная двухточечная функция в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{\text{glob}}(t, x) &\equiv \langle \phi(t, x)\phi(t, 0) \rangle - \langle \phi(0, x)\phi(0, 0) \rangle = \\ &= \frac{1}{L} \sum_n e^{ik_n x} \frac{\sin^2(\omega_n t)}{\omega_n \sinh(\omega_n \tau_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

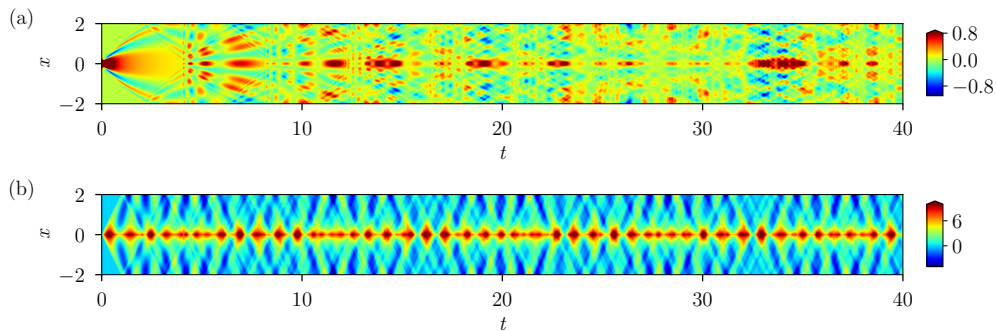


Рис. Двухточечная корреляционная функция после: (а) операторного локального квенча, параметры $L = 4$, $\varepsilon = 0.05$, $m = 10$; (б) граничного глобального квенча, параметры $L = 4$, $\tau_0 = 0.01$, $m = 3$.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРОФИЛЕЙ К ВАРИАЦИЯМ ПАРАМЕТРОВ

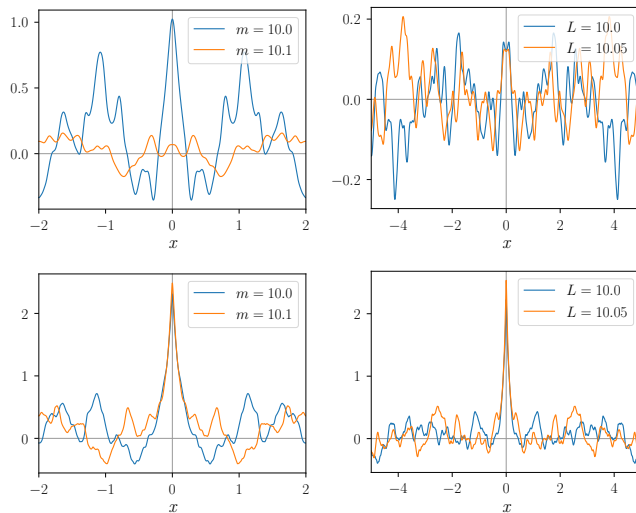


Рис. Двухточечная корреляционная функция после: (сверху) операторного локального кванча и (снизу) граничного глобального кванча с небольшими вариациями параметров (m и L) при фиксированном значении временной координаты.

ОБЩЕННАЯ СТАТИСТИКА РАССТОЯНИЙ

Анализируется статистика отношений расстояний между соседними экстремумами корреляционной функции при фиксированной пространственной координате.

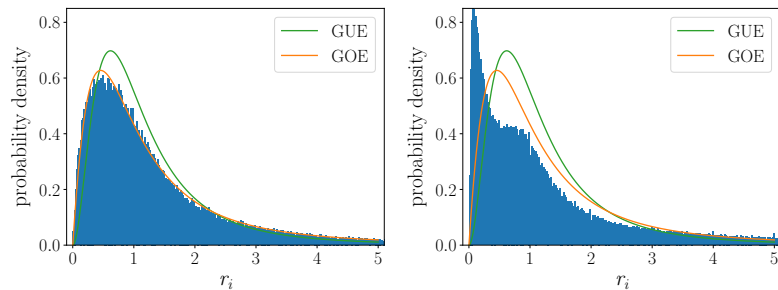


Рис. Обобщённая статистика расстояний для регуляризованной двухточечной корреляционной функции после: (а) операторного локального квенча; (б) граничного глобального квенча.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

- ▶ SFF может быть определён через аналитически-продолженную термальную статистическую функцию [Cotler et al., 2016],

$$g(\beta, t) = \left| \frac{Z(\beta + it)}{Z(\beta)} \right|^2. \quad (8)$$

- ▶ Обычно эта величина вычисляется для тепловой матрицы плотности. В более общем случае, для матрицы плотности ρ , $Z(t) = \text{Tr}(e^{-iHt}\rho)$, тогда

$$Z(t) = \text{Tr} \left[e^{-iHt} |\Psi\rangle\langle\Psi| \right]. \quad (9)$$

- ▶ Для возбужденного состояния операторного локального квенча это выражение упрощается при использовании разложения по модам до

$$Z(t) = \frac{1}{AL} \sum_n \frac{e^{-2\varepsilon\omega_n}}{2\omega_n} e^{-i\omega_n t}, \quad g(t) = g_0 \sum_n \sum_s p_n p_s e^{-i(\omega_n - \omega_s)t}, \quad (10)$$

где $p_n = e^{-2\varepsilon\omega_n}/(2\omega_n)$ и $g_0 = (\sum_n p_n)^{-2}$

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

Обобщённый спектральный форм-фактор по данным положений экстремумов корреляционной функции [Bianchi et al., arXiv:2403.00713]:

$$g(s) = g_0 \sum_{i,j=1}^N e^{-i(z_i - z_j)s}, \quad (11)$$

где z_i — это набор (нормированных) положений экстремумов, s — сопряженная переменная для z в Фурье-преобразовании.



Рис. (Слева) Спектральный форм-фактор; (в центре) обобщённый спектральный форм-фактор для корреляционной функции после операторного локального квенча; (справа) то же после граничного глобального квенча.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Динамика неравновесных наблюдаемых в скалярной теории поля в конечном объёме может проявлять универсальность теории случайных матриц:

1. статистика отношений расстояний между последовательными экстремумами в корреляционной функции близко описывается статистикой гауссового ортогонального ансамбля;
2. обобщённый спектральный форм-фактор, основанный на статистике экстремумов, демонстрирует структуру «дип–рэмп–плато», характерную для ансамблей случайных матриц.

Напротив, стандартный спектральный форм-фактор, определяемый по статистической сумме, не демонстрирует линейного роста, как и ожидается для свободных теорий.

Спасибо за внимание!