

PACIFIC QUANTUM CENTER



FAR EASTERN
FEDERAL
UNIVERSITY

Решёточные модели теории поля на сфере Фибоначчи

Починок А.С., Молочков А.В., Чернодуб М.Н., Гой В.А.

Тихоокеанский квантовый центр, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации,
проект Государственного задания № FZNS-2024-0002

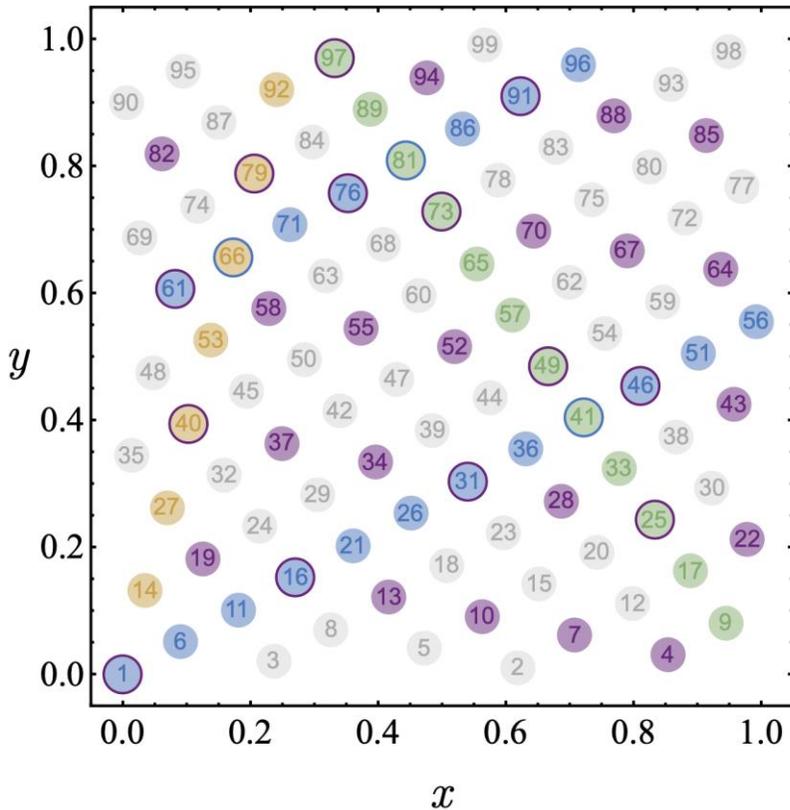
Сессия-конференция «Физика фундаментальных взаимодействий»

10 – 13 марта 2026 г.

Исследования фазовых переходов в искривлённых пространствах позволяют изучать влияние кривизны и топологии на критические явления. Результаты таких исследований могут быть применены в астрофизике, физике конденсированного состояния и квантовой хромодинамике, например, для моделирования кварк-глюонной плазмы в экстремальных условиях, таких как ранняя Вселенная.

Целью работы является исследование применимости сферической решетки Фибоначчи для моделирования спиновых и калибровочных теорий поля в искривленном пространстве.

Решетка Фибоначчи



Решетка Фибоначчи в единичном квадрате

В основе распределения узлов решетки лежат числа Фибоначчи F : $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, ($i \geq 3$).

$$F_i = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}.$$

3

Отношение двух соседних чисел приближается к значению золотого сечения:

5

$$g = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_{i+1}}{F_i} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

8

Плоская решетка Фибоначчи представляет собой единичный квадрат:

13

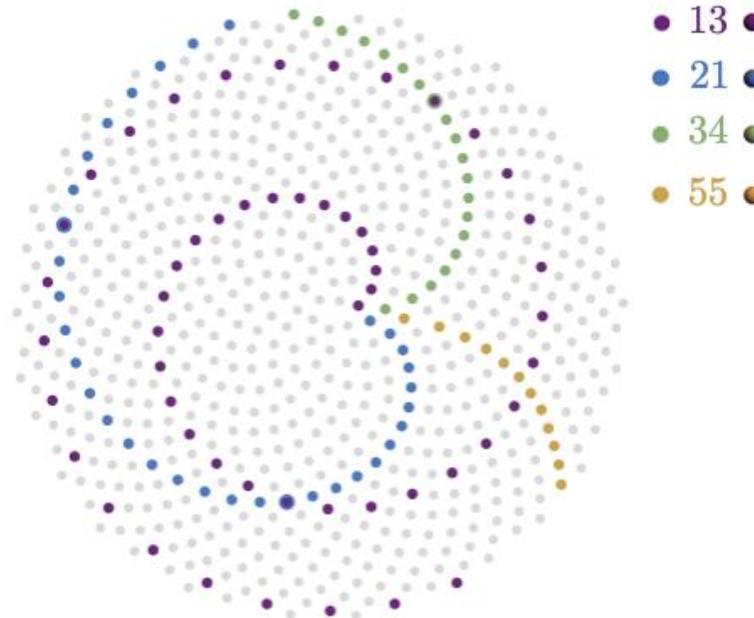
$$x_k = \left\{ \frac{k}{g} \right\}; \quad y_i = \frac{k}{N}.$$

k - номер узла, N - количество узлов, $\{ \}$ - дробная часть.

Спираль (a):

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases},$$

$$\begin{cases} r = r_0 \sqrt{i - 1/2} \\ \varphi = 2 \pi i g^{-1} \end{cases}$$



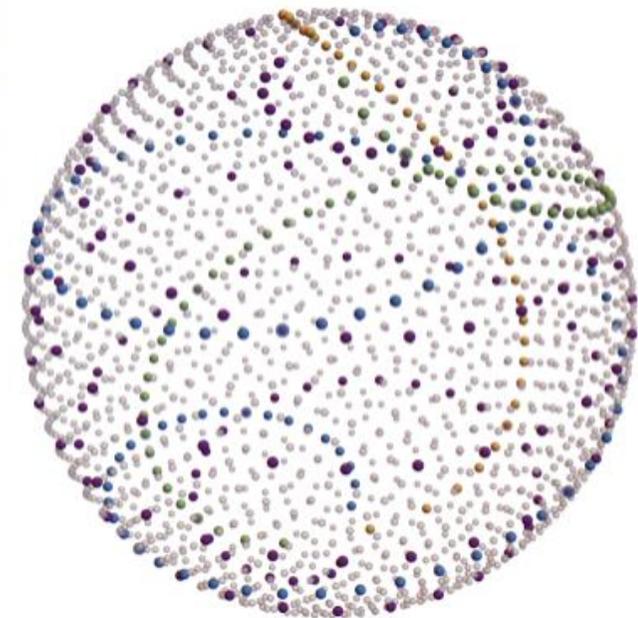
(a)

Сфера (b):

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi ; \\ y = r \sin \theta \sin \varphi ; \\ z = r \cos \theta , \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{2 \pi i}{g} ;$$

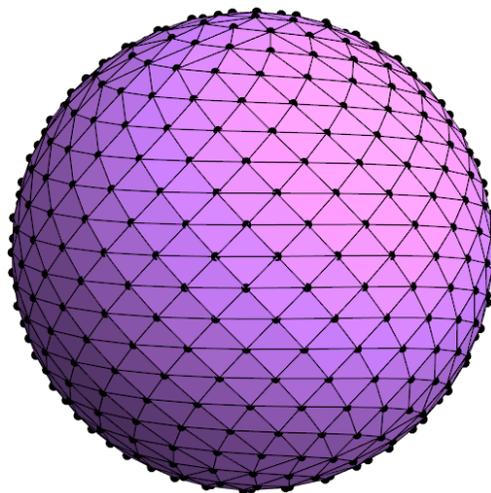
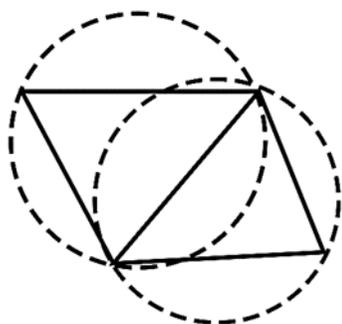
$$\theta = \arccos \left(\frac{1 - 2(i + 0.5)}{n} \right).$$



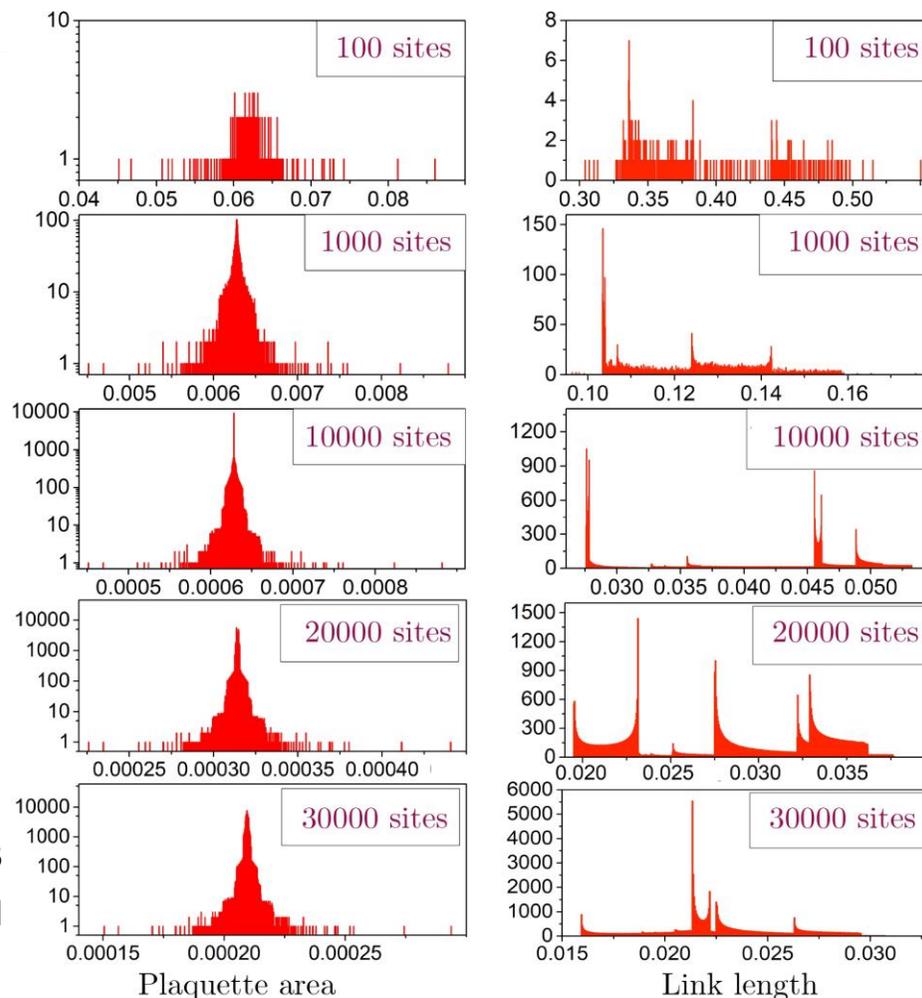
(b)

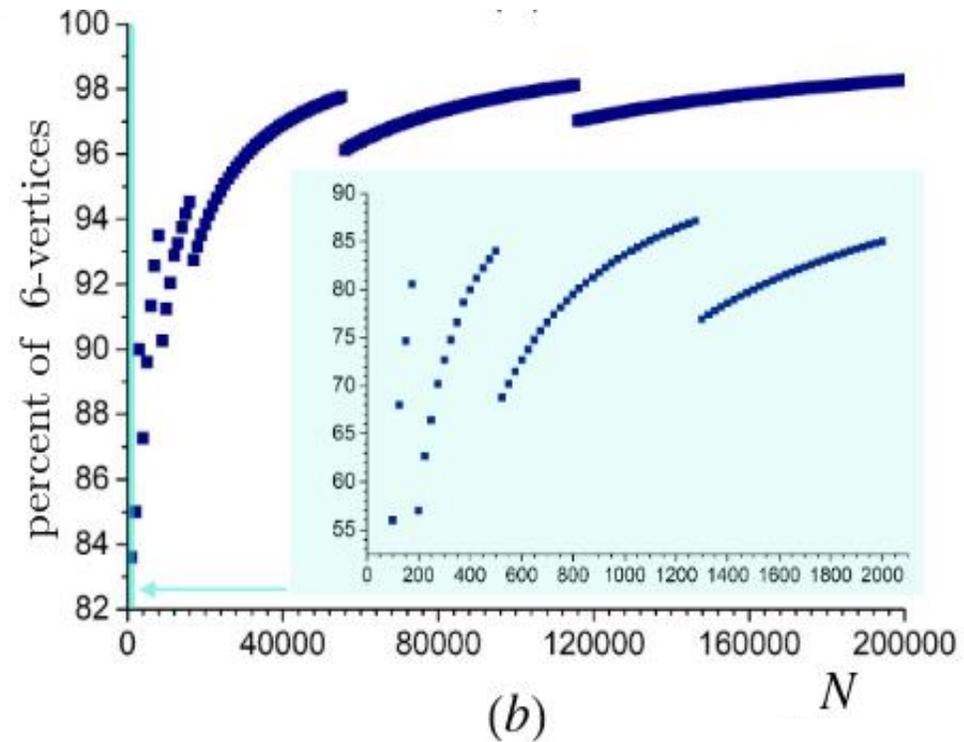
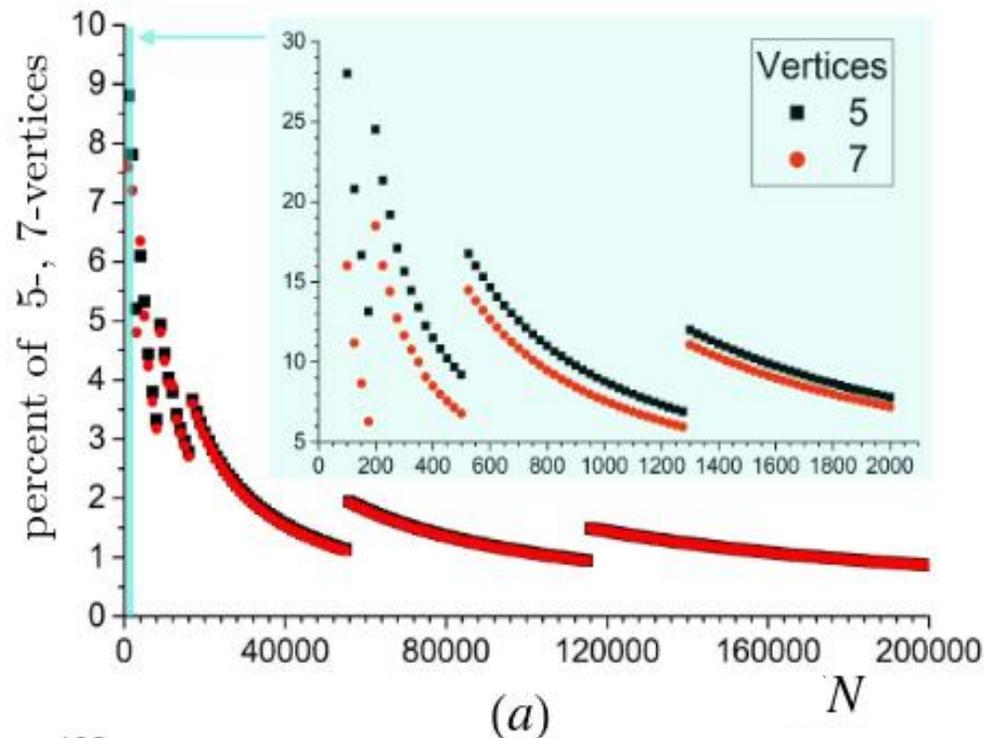
Дискретизация решетки Фибоначчи

Критерий метода Делоне: описанная вокруг любого треугольника окружность не должна содержать внутри других точек набора.



Распределение площадей треугольников (слева) и длин ребер (справа) решетки Фибоначчи на сфере.



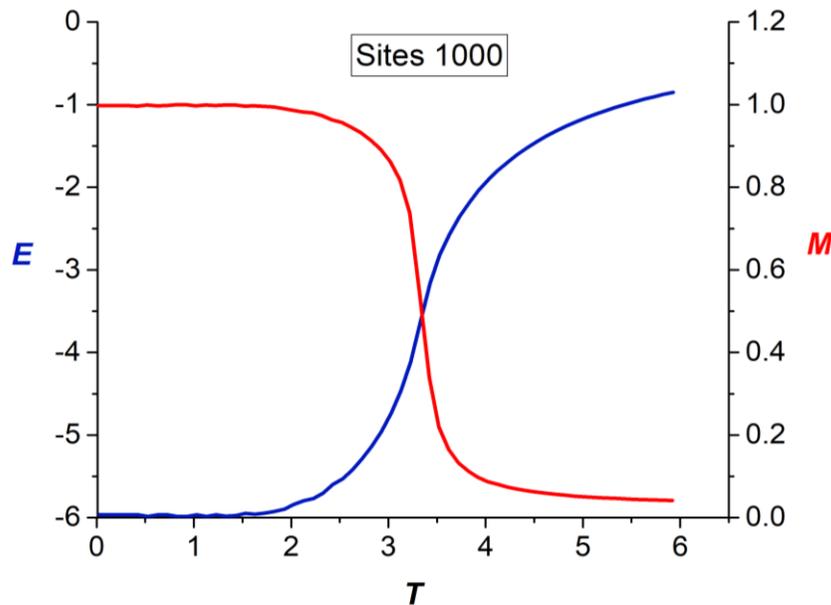


Распределение %-числа вершин с 5 и 7 соседями (a) и 6 соседями (b) на сфере Фибоначчи как функция от N .

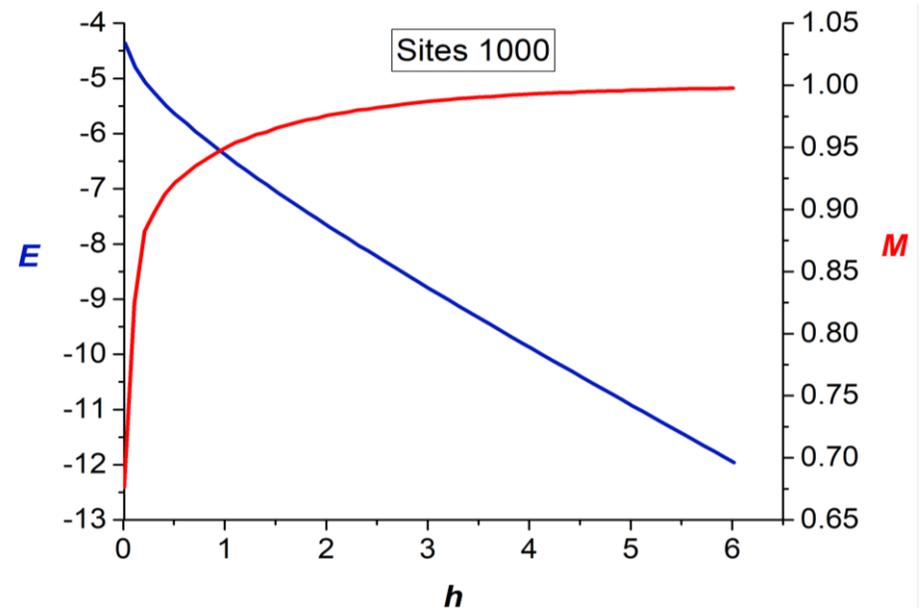
Модель Изинга на сфере Фибоначчи

Узлам решетки случайным образом присваивается спиновая переменная $S_i = \pm 1$.

Гамильтониан системы: $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i$ Намагниченность: $M = \frac{1}{N} \sum_i S_i$



Энергия и намагниченность в
отсутствии магнитного поля



Энергия и намагниченность как
функция от магнитного поля

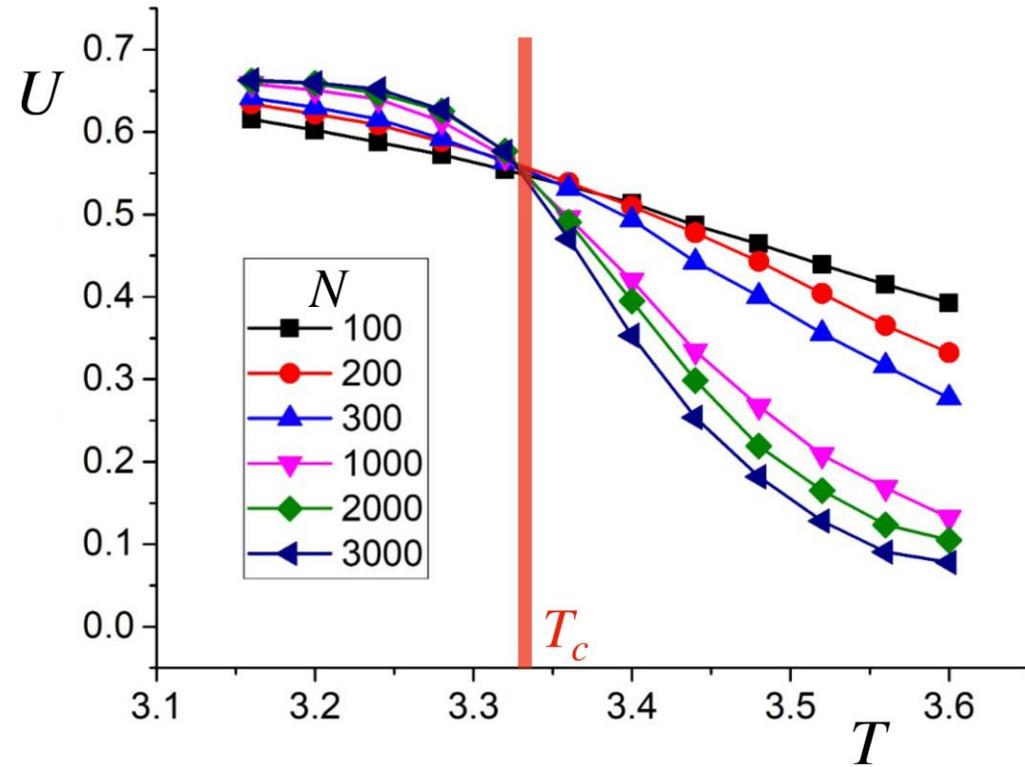
Модель Изинга на сфере Фибоначчи

Точку фазового перехода можно идентифицировать используя кумулянт Биндера. Пересечение кривых Биндера для различных размеров решетки определяет критическую температуру T_c . Кумулянт 4-го порядка, выраженный через намагниченность:

$$U(T, N) = 1 - \frac{\langle M^4(T, N) \rangle}{3\langle M^2(T, N) \rangle^2}$$

$T_c \approx 3.35$ для сфер из 100-300 узлов;

$T_c \approx 3.32$ для сфер из 1000-3000 узлов.

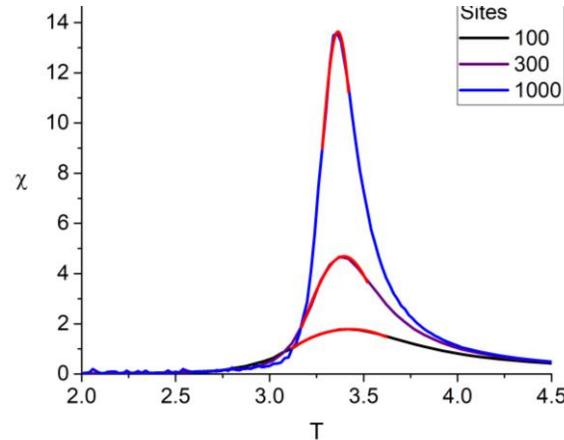


Кумулянт Биндера модели Изинга на сфере

Модель Изинга на сфере Фибоначчи

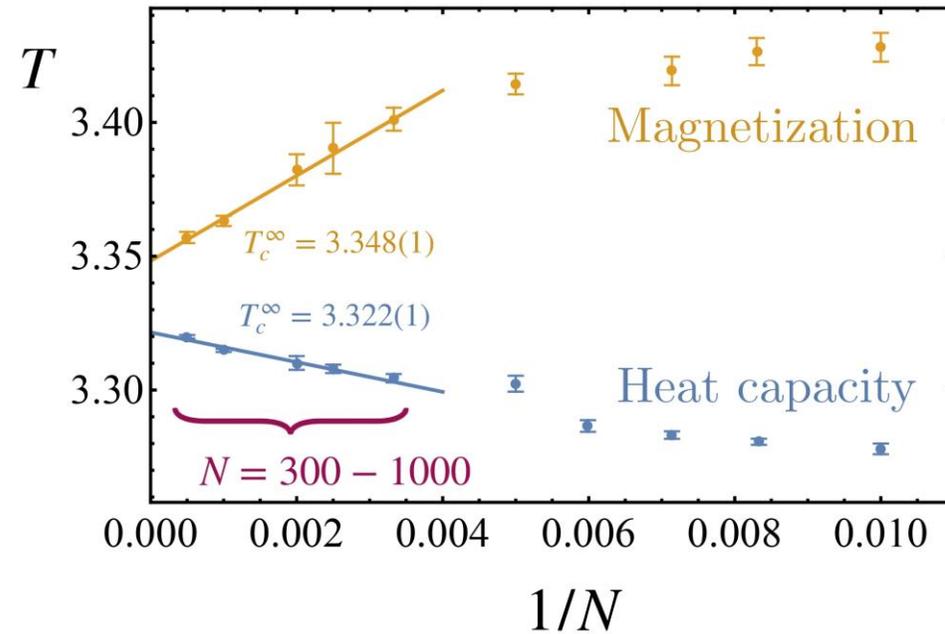
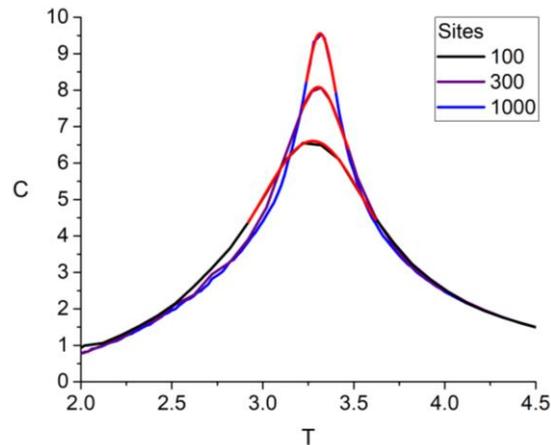
Магнитная
восприимчивость:

$$\chi = N \frac{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}{T}$$



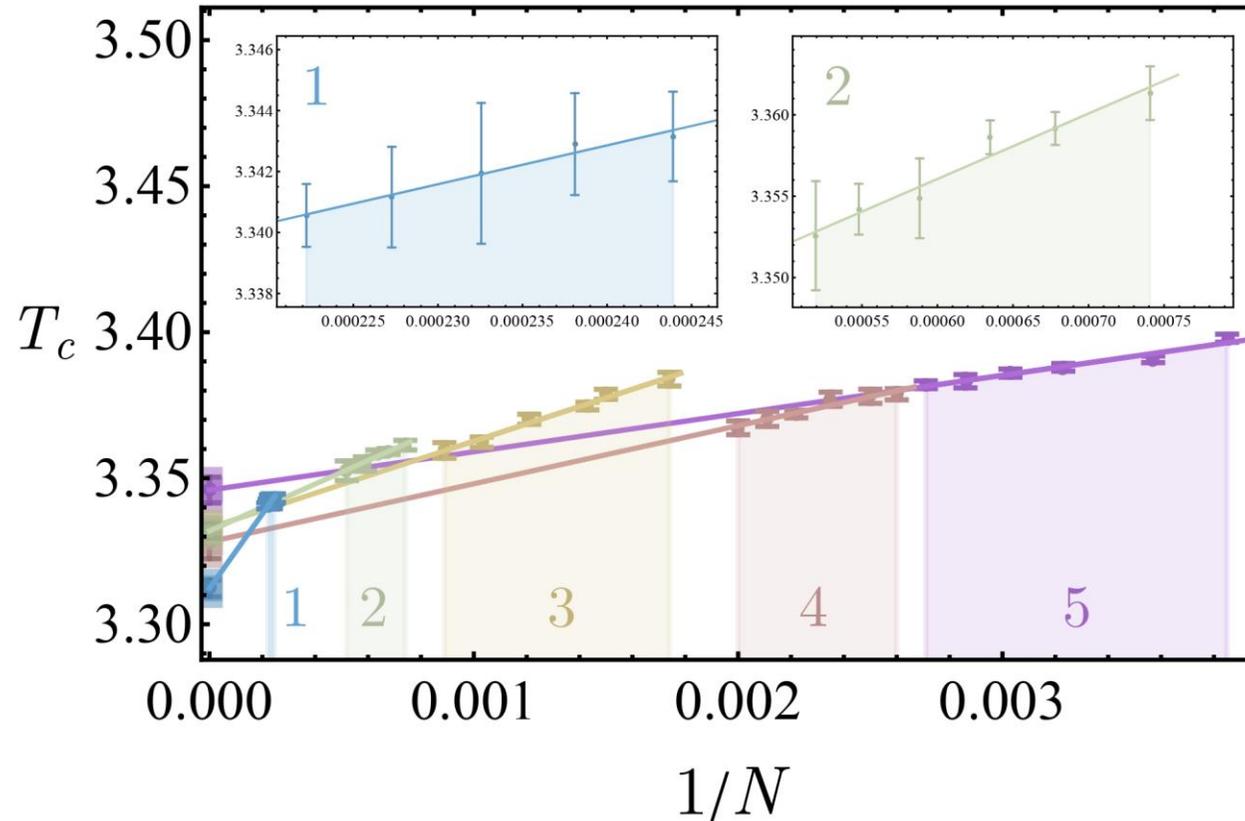
Теплоёмкость:

$$C = N \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{T^2}$$



Масштабирование псевдокритической температуры, полученной из магнитной восприимчивости и теплоемкости от $1/N$

Модель Изинга на сфере Фибоначчи

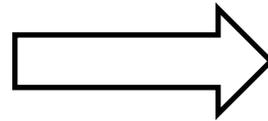


Масштабирование псевдокритической температуры, полученной из магнитной восприимчивости модели Изинга на сфере Фибоначчи как функция $1/N$

Сравнение T_c на сфере со значениями на плоских решетках

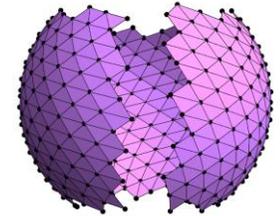
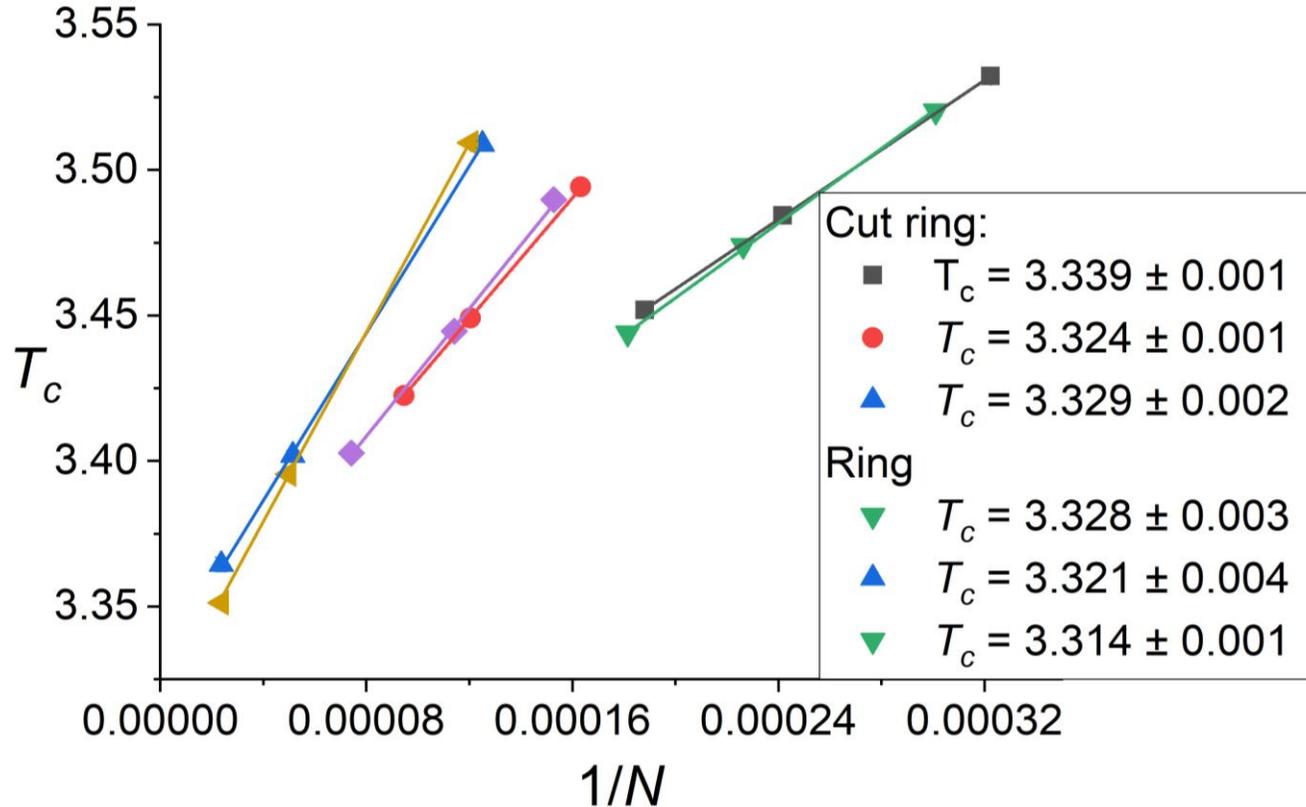
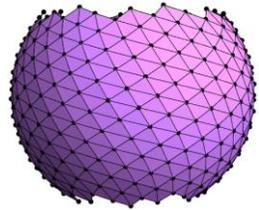
$$\frac{T_c^{\blacksquare}}{J} = \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \cong 2.2692$$

$$\frac{T_c^{\Delta}}{J} = \frac{4}{\ln 3} \cong 3.6410$$



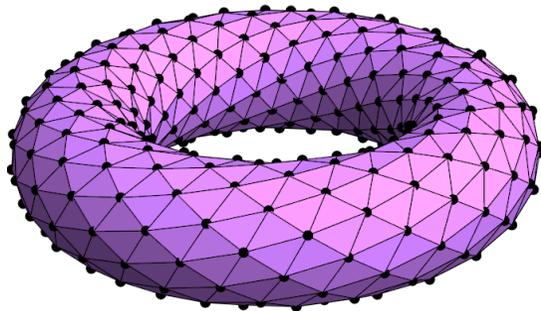
$$T_c^{\blacksquare} < T_c^{\otimes} \lesssim T_c^{\Delta}$$

$$\frac{T_c^{\otimes}}{J} = \frac{10}{3} \cong 3.33(3)$$



Критическая температура, полученная аппроксимацией магнитной восприимчивости, от $1/N$ для кольцевых топологий сферы.

Модель Изинга на торе Фибоначчи

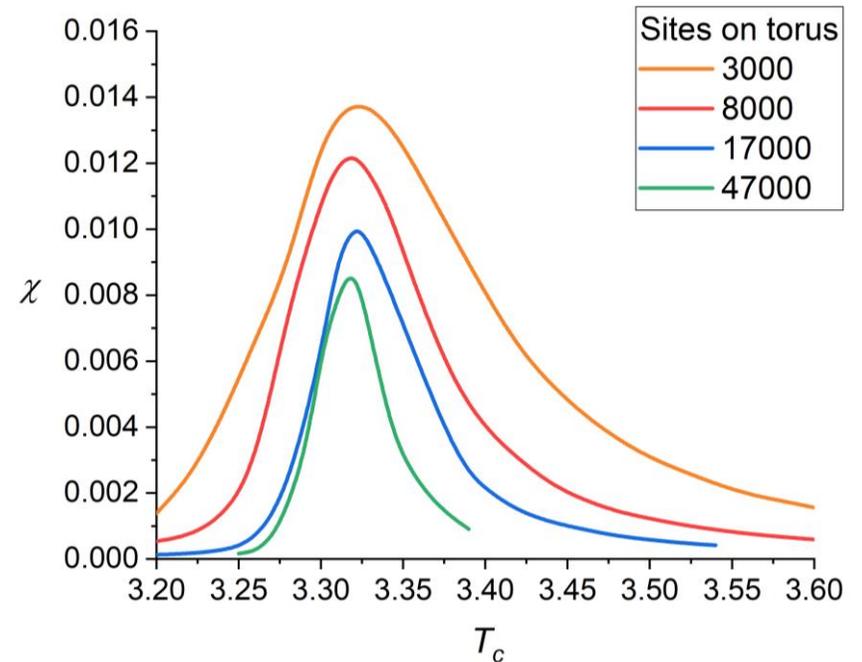
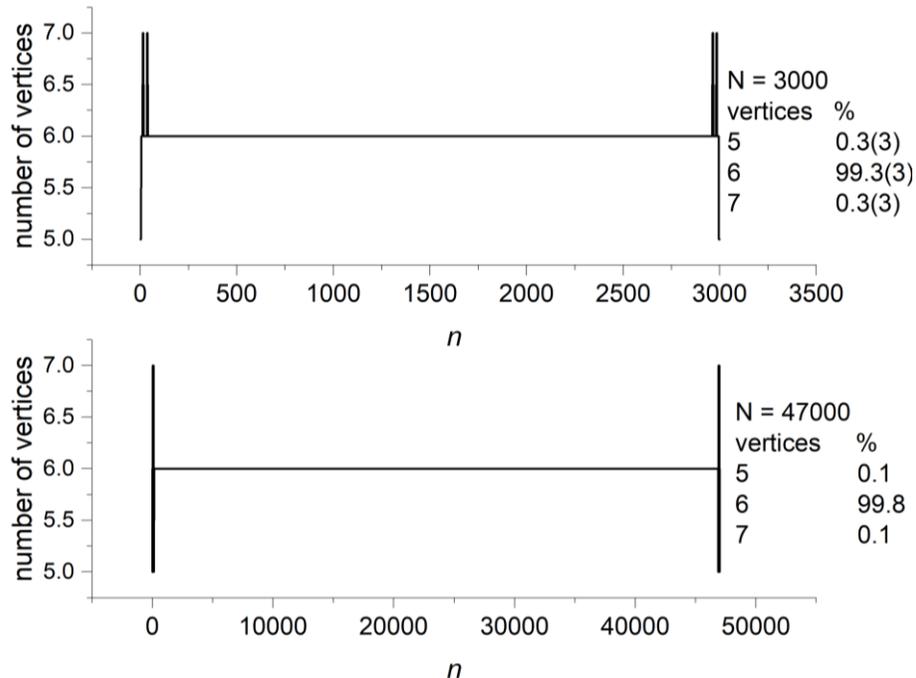


$$x = (R + r \cos \varphi) \cos \vartheta$$

$$y = (R + r \cos \varphi) \sin \vartheta$$

$$z = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \frac{2\pi i}{g} \quad \vartheta = \frac{2\pi i}{N}$$



Распределение % - вершин на торе

Магнитная восприимчивость на торе

На рёбрах решетки, между узлами i и j , распределены калибровочные поля, принимающие значения

$$U_{ij} = \pm 1.$$

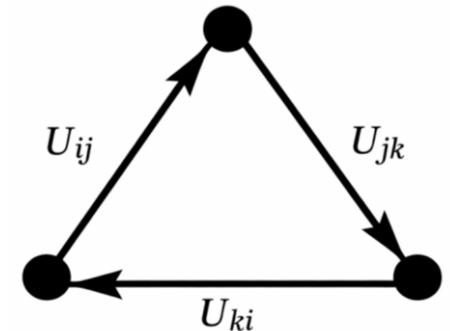
Модель инвариантна относительно локального калибровочного преобразования:

$$U_{ij} \rightarrow \epsilon_i U_{ij} \epsilon_j,$$

$$\epsilon_i = \pm 1.$$

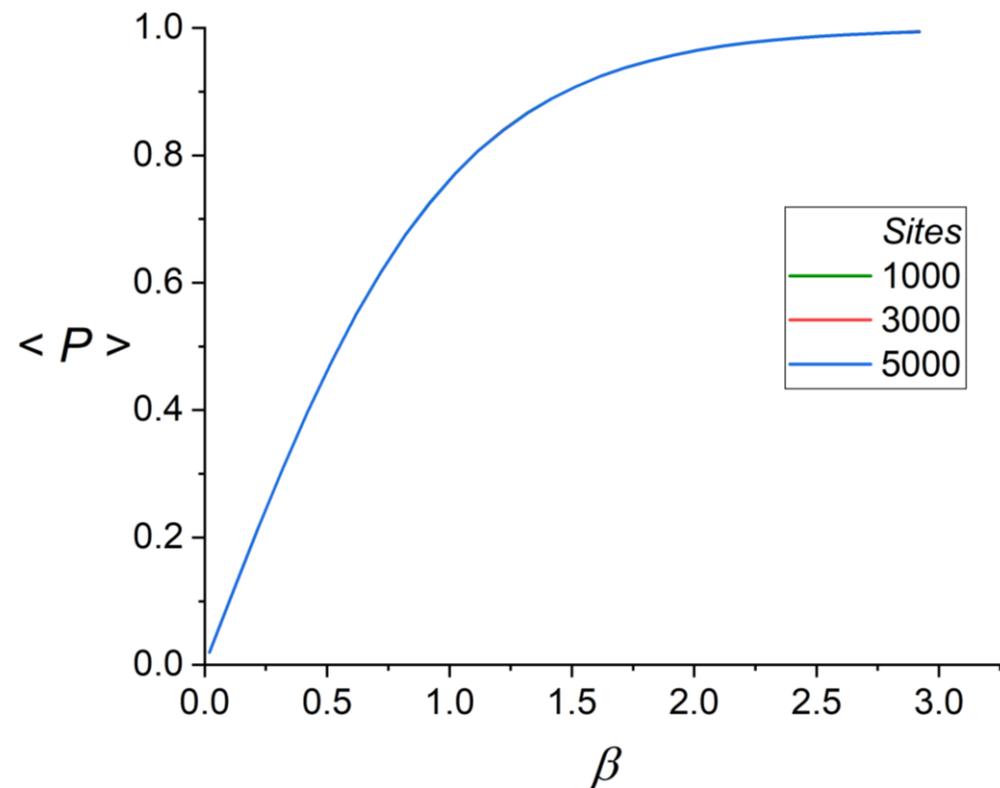
Действие на решетке:

$$S = -\beta \sum_{\Delta} \prod_{i,j \in \Delta} U_{i,j}$$

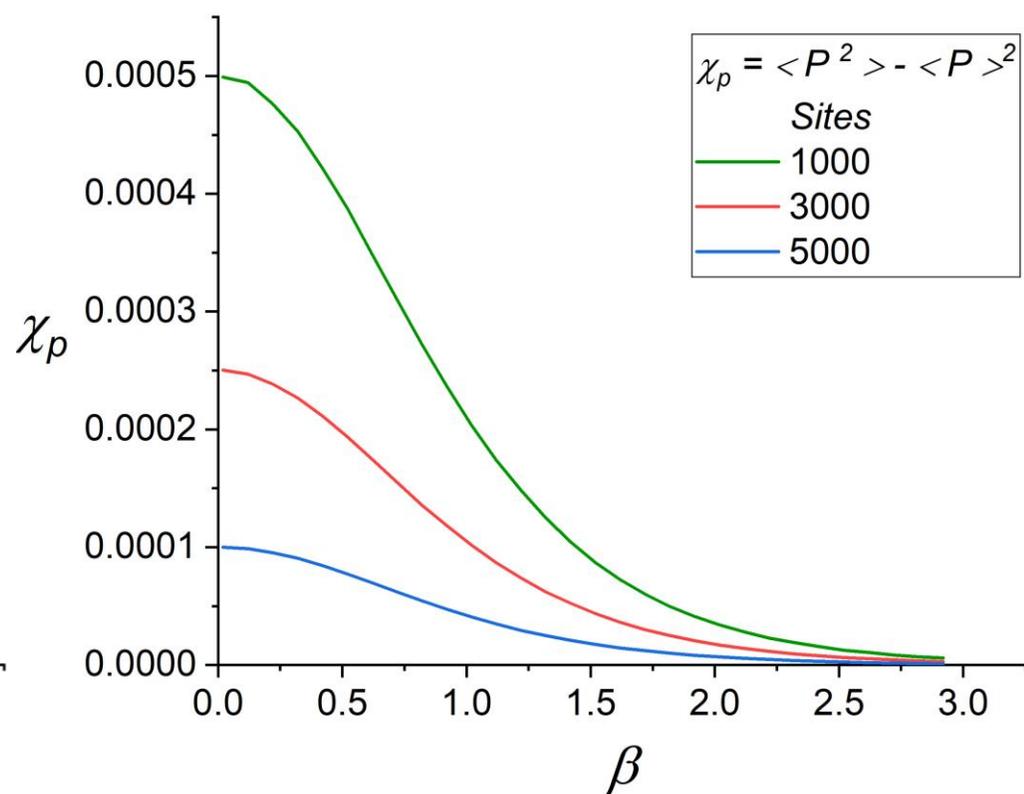


Калибровочная Z_2 теория в $2D$ сводится к одномерной спиновой модели Изинга.

Z_2 калибровочная теория на сфере Фибоначчи

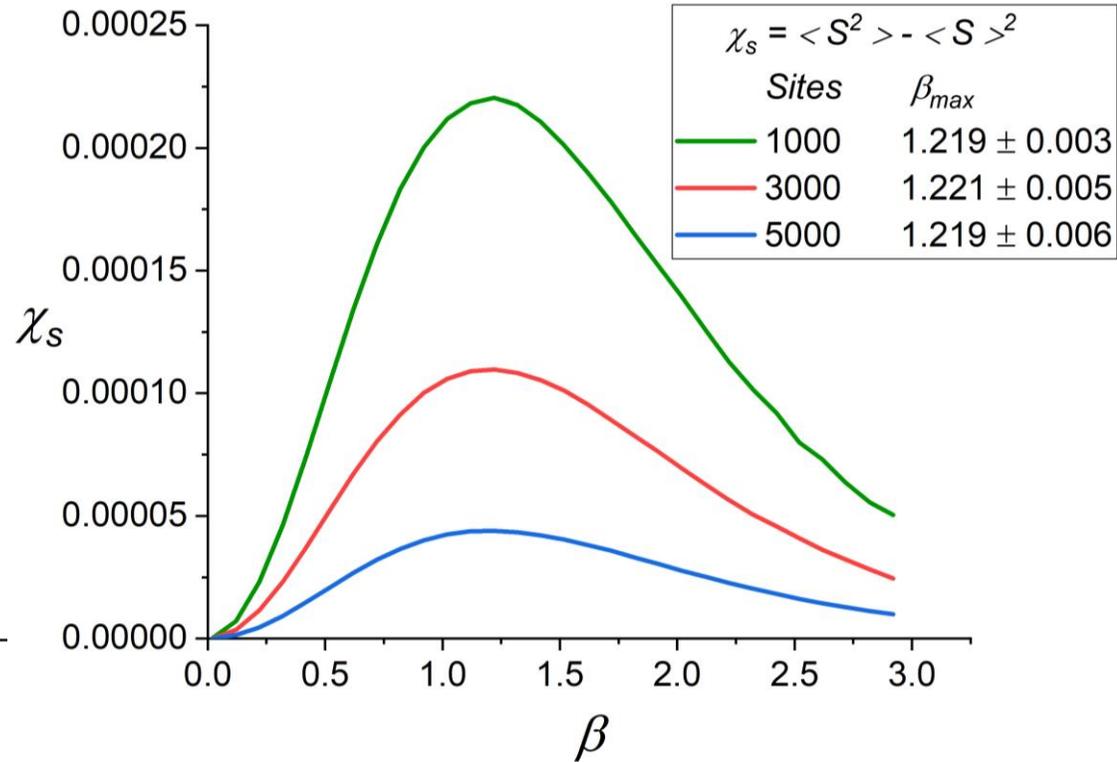
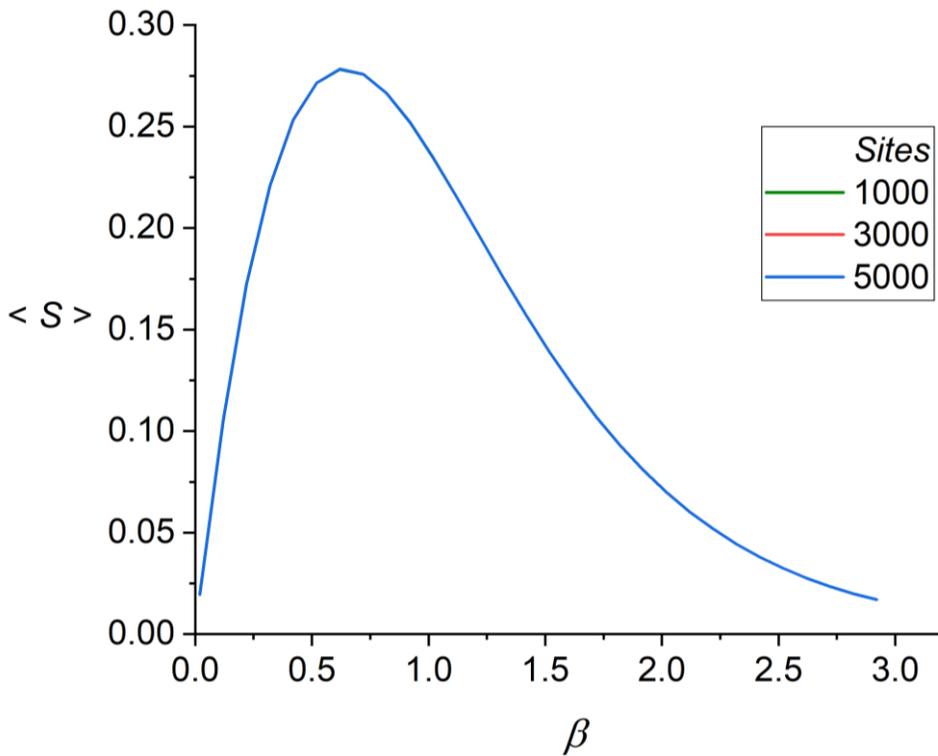


Распределение поля среднего плакета от β



Восприимчивость плакета от β

Z_2 калибровочная теория на сфере Фибоначчи



Действие на сфере Фибоначчи и его восприимчивость для разного числа узлов.

1. Сфера Фибоначчи, как модель искривленного пространства, является потенциально эффективной, поскольку обладает однородным покрытием треугольными плакетками равной площади, что потенциально приводит к гладкому пределу.
2. По мере увеличения узлов свойства связанности решетки Фибоначчи претерпевают разрывные переходы, связанные с образованием новых спиралей, что влияет на критическое поведение физических величин спиновой системы.
3. Модель Изинга на решетке Фибоначчи обладает критической температурой $T_c^{\otimes} \cong 3.33(3)$. В пределе, это значение незначительно отличается от значения для равносторонней треугольной плоской решетки. Для кольцевых топологий сферы это значение аналогично, что указывает на влияние спиральной структуры.
4. Калибровочная Z_2 теория на сфере Фибоначчи дает предсказуемые результаты в $2D$ пространстве: отсутствие фазового перехода. Это подтверждает дальнейшую применимость решетки для моделирования калибровочных теорий поля.