Особенности смешивания нейтрино и сценарий темной материи в моделях обратного seesaw

Казаркин Дмитрий [1,2],
совместно с
М.Н. Дубининым[2] и Е.Ю. Федотовой[2]

[1] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
[2] НИИ ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, МГУ, Москва

Сессиия - конференция СЯФ ОФН РАН

10 - 13 марта 2026
Новосибирск

Содержание

Проблема масс нейтрино

- Нейтрино обладают чрезвычайно малыми, но ненулевыми массами. Основные имеющиеся данные:
  1. Разности квадратов масс

$$m_{\text{light}} = ? \quad \sqrt{|\Delta m^2_{21}|} \simeq 0.009 \text{ эВ} \quad \sqrt{|\Delta m^2_{32}|} = 0.050 \text{ эВ}$$

  2. Матрица нейтринного смешивания PMNS

$$\nu_\alpha = \sum_\alpha (U_{\mathrm{PMNS}})_{\alpha i} \nu_i \qquad |U_{\mathrm{PMNS}}| \simeq \begin{pmatrix} 0.82 & 0.55 & 0.15 \\ 0.37 & 0.61 & 0.71 \\ 0.32 & 0.59 & 0.68 \end{pmatrix} \qquad U^\dagger_{\mathrm{PMNS}} \stackrel{?}{=} U^{-1}_{\mathrm{PMNS}}$$

- В Стандартной модели нейтрино - безмассовые частицы $\nu_L \in L = (\mathbf{0}, \mathbf{2}, -1)$, ν_R - отсутствуют.
- Возможное естественное объяснение — **механизм качелей** (и его вариации)
  1. Качели типа I (Minimal seesaw) $\mathcal{L} \supset \frac{1}{2} M_R \overline{\nu^c_R} \nu_R + \text{H.c.}$
  2. Качели типа II (seesaw через вакуумное среднее) $\mathcal{L} \supset Y \frac{v^2}{M_\Delta} \overline{\nu^c_L} \nu_L + \text{H.c.}$
  3. **Обратные качели (Inverse seesaw, ISS)** - Рассмотрим детально
- Эти модели могут содержать фермион с массой $m_{\mathrm{DM}} \sim \mathcal{O}(\text{кэВ})$ - кандидат на роль теплой темной материи (WDM)

Проблема малых юкавских констант

Описание масс нейтрино стандартным механизмом Хиггса как и для других дираковских лептонов приводит к $y_\nu \propto \frac{m_\nu}{\langle\Phi\rangle} < 10^{-12}$;

Seesaw type I: $\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}\overline{\nu_R^c} M_R \nu_R + f_\nu \cdot \overline{L}\tilde{\Phi}\nu_R + \text{H.c.}$ $\boxed{m_\nu \simeq -\langle\Phi\rangle^2 \; f_\nu M_R^{-1} f_\nu^T}$

- (GUT версия, $f_\nu \sim 1$), где M_R - майорановская массовая матрица правых нейтрино, дающая массу тяжелым нейтральным лептонам (HNL).

$$m_\nu \propto \frac{\langle\Phi\rangle^2}{||M_R||} \quad \rightarrow \quad ||M_R|| \simeq 10^{13} - 10^{16} \text{ ГэВ для } m_\nu \simeq 0.01 - 1 \text{ эВ}$$

- (νMSM версия, $M_{\rm HNL} \lesssim 246$ ГэВ) + DM HNL $M_{\rm N_{DM}} \simeq \mathcal{O}(10 \text{ кэВ})$

$$m_\nu \propto f_\nu^2 \langle\Phi\rangle \quad \rightarrow \quad f_\nu \propto \sqrt{\frac{m_\nu}{\langle\Phi\rangle}} \lesssim 10^{-6}$$

Смешивание $\nu_\alpha - N_I$: $|\theta_{\alpha I}| \propto \sqrt{\frac{m_\nu}{M_{\rm HNL}}}$ [J.A. Casas and A. Ibarra, Nucl. Phys. B 618 (2001) 171.]

Для смешивания с темной материей требуются очень малые значения $m_{\nu,\rm light} < 10^{-5}$ эВ и тонкая настройка свободных параметров для f_ν

Общая модель ISS (p, q)

Состав полей $ISS(\mathrm{p},\mathrm{q})$

– $\boxed{\nu_{L,\alpha}, \quad \alpha = e, \mu, \tau}$ левые флейворные нейтрино

– $\boxed{N_{R,a} \quad a = \overline{1,\mathrm{p}}}$ правые нейтрино только с дираковским массовым слагаемым M_R - синглеты по G_{SM}

– $\boxed{\Sigma_{R,b} \quad b = \overline{1,\mathrm{q}}}$ правые нейтрино только с майорановским массовым слагаемым μ - синглеты по G_{SM}

$$-\mathcal{L}^{\mathrm{ISS}}_{\mathrm{mass}} = Y(\bar{l}_L\tilde{\Phi})\nu_R + M_R\overline{\nu^c_R}S_R + \frac{\mu}{2}\bar{S}^c_R S_R + \mathrm{H.c.}, \tag{1}$$

где $\quad m_D = f_\nu\langle\Phi\rangle, \qquad M_R = f_R \cdot \Lambda(M_R), \qquad \mu = f \cdot \Lambda(\mu)$

Условие естественности (Naturalness condition)

$$||M_R|| \gg ||m_D|| \gg ||\mu|| \qquad \longleftrightarrow \qquad \Lambda(M_R) \gg \langle\Phi\rangle \gg \Lambda(\mu)$$

где $\Lambda(M_R)$ - масштаб Новой Физики и масштаб нарушения $\Lambda(\mu)$ полного лептонного числа $\Delta L = 2$

Диагонализация массовой матрицы: шаг 1

Все массовые слагаемые (и дираковские, и майорановские) могут быть представлены в виде одной майорановской массовой матрицы $\frac{1}{2}\overline{\Psi^c}\mathrm{M}\Psi + \mathrm{H.c.}$

$$\mathcal{L}_{ISS} = \frac{1}{2}(\overline{\nu}_L, \quad \overline{\nu^c_R}, \quad \overline{\Sigma^c_R}) \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3\times 3} & m_{D\ 3\times \mathrm{p}} & \mathbb{O}_{3\times \mathrm{q}} \\ m^T_{D\ \mathrm{p}\times 3} & \mathbb{O}_{\mathrm{p}\times\mathrm{p}} & M_{R\ \mathrm{p}\times\mathrm{q}} \\ \mathbb{O}_{\mathrm{q}\times 3} & M^T_{R\ \mathrm{p}\times\mathrm{q}} & \mu_{\ \mathrm{p+q}\times\mathrm{p+q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^c_L \\ \nu_R \\ \Sigma_R \end{pmatrix} + \mathrm{H.c.}$$

Переписываем массовую матрицу в форме **seesaw I**, обозначив $\tilde{m}_D \equiv (m_D, \mathbb{O})$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{\ 3\times 3} & \widetilde{m}_{D\ 3\times(p+q)} \\ \widetilde{m}^T_{D\ (\mathrm{p+q})\times 3} & \mathcal{X}_{(\mathrm{p+q})\times(\mathrm{p+q})} \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{\ p\times p} & M_{R\ p\times q} \\ M^T_{R\ q\times p} & \mu_{\ q\times q} \end{pmatrix}$$

Структура смешивания состояний нейтрино определяется матрицей U :
$\Psi = U\Psi'$ [A Ibarra et al 2011 J. Phys.: Conf. Ser. 335 012048]

$$\mathrm{U}^T\mathrm{MU} = \mathrm{diag}\,(m_1 \ldots M_1 \ldots)\,, \qquad \text{где } \mathrm{U} = \mathrm{W}\cdot\mathrm{V}, \quad \mathrm{W} = \exp(\omega) \simeq I + \omega,$$

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} U^*_\nu & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathcal{U}_{(\mathrm{p+q})\times(\mathrm{p+q})} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\tilde{\theta}_{3\times(\mathrm{p+q})} \\ \tilde{\theta}^\dagger_{(\mathrm{p+q})\times 3} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ 3\times\mathrm{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 3\times\mathrm{q} \end{pmatrix}.$$

Эффективный оператор масс активных нейтрино

Дополнение по Шуру (Shur complement)

Пусть $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, тогда **Дополнение по Шуру** $(M|D) \equiv A - BD^{-1}C$

Эффективная массовая матрица майорановских активных нейтрино в модели $\mathrm{ISS}\,(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ для произвольных p и q: (здесь $\hat{m} = \mathrm{diag}\,(m_1, m_2, m_3)$)

$$U_\nu \hat{m} U_\nu^T \equiv m_\nu = (\mathrm{M}|\mathcal{X}) \equiv -\tilde{m}_D \mathcal{X}^{-1} \tilde{m}_D^T = -(m_D, \ \ \mathbb{O}) \begin{pmatrix} (\mathcal{X}|\mu)^{-1} & \star \\ \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_D^T \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m_\nu = m_D \left(M_R \mu^{-1} M_R^T\right)^{-1} m_D^T \propto \frac{\Lambda(\mu)\langle\Phi\rangle^2}{\Lambda(M_R)^2}}\ ,$$

Если $\mathrm{p} = \mathrm{q}$, то получаем

$$m_\nu = m_D (M_R^T)^{-1} \mu (M_R)^{-1} m_D^T$$

$\mathrm{ISS}\,(\mathrm{p}, \mathrm{q})$-механизм генерирует *на древесном уровне* $\min\,(\mathrm{p}, \mathrm{q}, 3)$ ненулевых масс активных нейтрино, поэтому в реалистичных моделях* $\boxed{\mathrm{p}, \mathrm{q} \geq 2}$.

Структура смешивания в ISS (p, q)

Смешивание между стерильными и активными нейтрино задаются матрицей $\tilde{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2) = \tilde{m}_D \mathcal{X}^{-1}$. Эти компоненты определяют взаимодействие с частицами стандартной модели за счет слабых токов

$$\mathcal{L}^{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha \gamma_\mu P_L \left[\sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} \nu_i + \sum_{J=1}^{p+q} (\tilde{\theta}\mathcal{U})^*{}_{kJ} N_J \right] W^\mu + \text{H.c.}$$

$$\mathcal{L}^{NC} = \frac{g}{2c_w} \left[\dots + \sum_{J=1}^{p+q} (\tilde{\theta}\mathcal{U})^*{}_{kJ} N_J \right] \gamma_\mu P_L \left[\sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} \nu_i + \dots \right] Z^\mu$$

$$\theta_1 = m_D \left(M_R \mu^{-1} M_R^T \right)^{-1} \propto \frac{\langle \Phi \rangle \Lambda(\mu)}{\Lambda(M_R)^2}, \qquad ||m_\nu|| \propto \theta_1 \langle \Phi \rangle \tag{2}$$

$$\theta_2 = \theta_1 M_R \mu^{-1} \propto \frac{\langle \Phi \rangle}{\Lambda(M_R)} \gg \theta_1. \qquad U^2_{\text{mix}} \propto |\theta_2|^2 \tag{3}$$

Матрица $\mathcal{U}$ определяется видом массовой матрицы стерильного сектора $\mathcal{X}$ и имеет нетривиальные особенности при p = q и p $\neq$ q. Проиллюстрируем далее на характерных "игрушечных" моделях.

"Игрушечная"модель ISS(1,1)

Toy-model ISS(1,1):

$$\boxed{m_\pm = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4M^2}}{2}}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m_+ & 0 \\ 0 & m_- \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \mu + M & 0 \\ 0 & \mu - M \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{m_+}{M\sqrt{1+\frac{m_+^2}{M^2}}} & \frac{m_-}{M\sqrt{1+\frac{m_-^2}{M^2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m_+^2}{M^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m_-^2}{M^2}}} \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Имеются два майорановских состояния $N_i = N_{i,R} + (N_{i,R})^c, \; i = 1,2$ с близкими массами $\frac{\delta m}{m} \propto \frac{\mu}{M} \ll 1$. Для "исправления"знака массы m_- требуется переопределение поля $N_2 \equiv i\gamma_5 N_2'$. В итоге N_1 и N_2 формируют $\boxed{(N_\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 \pm iN_2')}$ - псевдо-дираковские состояния: $\boxed{(N_\mp)^c = N_\pm}$.

Флейворное нейтрино: $\nu_{L\alpha} \simeq P_L\left[(U_\nu)_{\alpha i}\,\nu_i - \overbrace{(\theta_1^*)_\alpha}^{\ll\theta_2} N_+ - (\theta_2^*)_\alpha N_-\right],$ (4)

"Игрушечная"модель ISS(1,2)

Toy-model ISS(1,2):

$$\boxed{m_{\pm} \simeq \pm\sqrt{M_1^2 + M_2^2} + \mathcal{O}(\mu) \qquad m_{\rm DM} \simeq \mathcal{O}(\mu)}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & M_1 & M_2 \\ M_1 & \mu_1 & 0 \\ M_2 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \mathcal{X}_0 + \delta\mathcal{X}(\mu) \to \begin{pmatrix} m_{\rm DM} & 0 & 0 \\ 0 & m_+ & 0 \\ 0 & 0 & m_- \end{pmatrix}$$

Масса легкого состояния: $m_{\rm DM}^{(1)} \simeq \frac{M_2^2\mu_1 + M_1^2\mu_2}{M_1^2+M_2^2} \propto \Lambda(\mu) \simeq \mathcal{O}(\text{keV})$

$$\mathcal{U}^{(0)} = \frac{1}{M_0}\begin{pmatrix} 0 & \frac{M_0}{\sqrt{2}} & \frac{M_0}{\sqrt{2}} \\ -M_2 & \frac{M_1}{\sqrt{2}} & -\frac{M_1}{\sqrt{2}} \\ M_1 & \frac{M_2}{\sqrt{2}} & -\frac{M_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_0 \equiv \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

Спектр содержит одно **легкое стерильное майорановское** нейтрино $\boxed{N_1 = N_{1,R} + (N_{1,R})^c}$ и псевдо-дираковскую пару $\boxed{N_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N_2 \pm iN_3\right)}$.

[См. также Asmaa Abada et al JCAP10(2014)001]

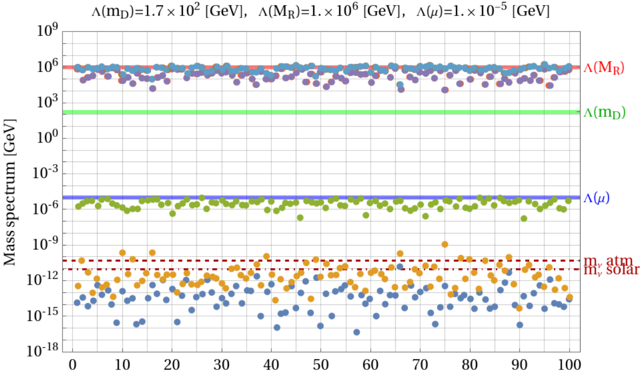
$$\nu_{L\ \alpha} \simeq P_L\left((U_\nu)_{\alpha i}\nu_i + \left[\frac{(\theta_2^*)_{2\alpha} - (\theta_2^*)_{1\alpha}}{\sqrt{2}}\right]N_1 - \left[\frac{(\theta_2^*)_{1\alpha} + (\theta_2^*)_{2\alpha}}{\sqrt{2}}\right]N_+ - (\theta_1^*)_\alpha N_-\right) \tag{5}$$

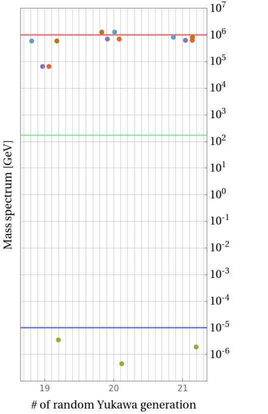
Модель ISS(2,3) Массовый спектр нейтрино

Спектр : N_1 - майорановоское стерильное нейтрино - кандидат в теплую темную материю, **Масса** $\lesssim \Lambda(\mu)$, **Смешивание** $\propto \left(\frac{\langle\Phi\rangle}{\Lambda(M_R)}\right)^2$

N_+, S_+ - две (псевдо)дираковские частицы

Параметры Юкавы в режиме *естественной иерархии*
$Y, f_R, f \in [10^{-3}, 1]$ (случайная генерация, log-равномерное распределение)

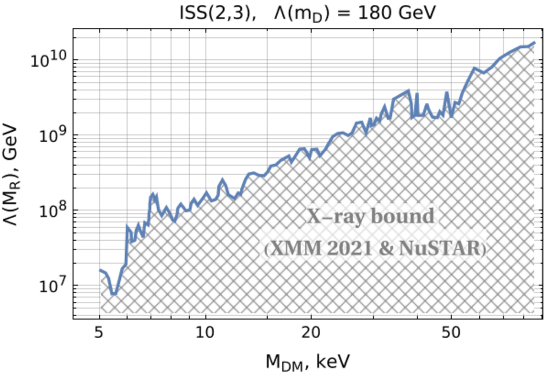


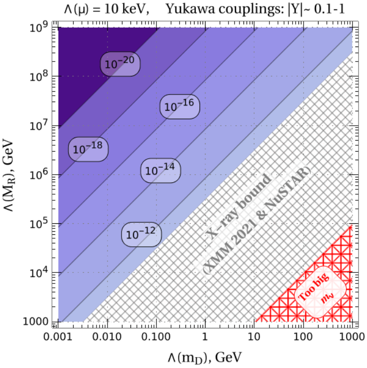


Гамма-астрономические ограничения для ISS(2,3)

Применяется случайная генерация юкавских констант $Y, f_\nu, f_R \sim 0.1 - 1$ т.е. без "естественной"иерархии (равномерное распределение на квадрате $[0.1 + 0.1i, 1 + 1i]$.

$$\Gamma_{N_1 \to 3\nu} = \frac{G_F^2 m_{\rm DM}^5}{96\pi^3} \mathrm{U}_{\rm DM}^2, \quad \Gamma_{N \to \gamma\nu} = \frac{27\alpha_{\rm EM}}{4\pi} \Gamma_{N_1 \to 3\nu}, \qquad \mathrm{U}_{\rm DM}^2 \equiv \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |\mathrm{U}_{\alpha 4}|^2$$





Заключение

- Получена аналитическая форма полной матрицы смешивания для произвольных целых значений p и q в моделях $\mathrm{ISS}\,(\mathrm{p},\mathrm{q})$.
- Установлена иерархия параметров смешивания: $\theta_1 = \varepsilon(\mu, M_R)\cdot\theta_2 \ll \theta_2$, где $\varepsilon \propto \frac{\Lambda(\mu)}{\Lambda(M_R)} \ll 10^{-6}$. (Для сценариев с ТМ, $\varepsilon \sim 10^{-14}$)
- Показано, что малость масс активных нейтрино $(m_\nu = \theta_1 m_D^T)$ является следствием естественной малости θ_1 и не требует дополнительной подгонки констант Юкавы.
- Смешивание активных и стерильных состояний определяется компонентой $\theta_2 \propto v/M_{\mathrm{PD}}$, что напрямую связывает его с масштабом масс псевдо-дираковских пар.
- В моделях $\mathrm{ISS}\,(\mathrm{p},\mathrm{p}{+}1)$ с легким стерильным нейтрино (кандидатом на ТМ) имеется модельная независимость массы ТМ (M_{DM}) от его смешивания (U^2_{DM}).
- В случае, если легкое состояние - кандидат на роль ТМ, тогда нижняя граница массы псевдо-дираковских нейтрино возрастает на 3-4 порядка. Даже для самых оптимистичных сценариев с $m_{\mathrm{DM}} \simeq 5$ кэВ $M_{\mathrm{PD}} \sim 10^3 - 10^6$ ТэВ при естественных предположениях о параметрах Юкавы: $10^{-3} < |y| < 1$.

Благодарности

Спасибо за внимание

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 23-2-2-19-1

Seesaw type I mechanism

[Backup slide]

Additional fields: $SU(2)_L \times U(1)_Y$ - singlets $\nu_{R,k}$, $k = \overline{1,3}$ (flavour basis) with heavy Majorana mass term $\sim M_R$. Mass states N_J, $J = \overline{1,3}$ are heavy neutral leptons (HNL).

Lagrangian: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\overline{\nu}_R \partial_\mu \gamma^\mu \nu_R - \left(Y\,\bar{l}_L \widetilde{\phi} \nu_R + \frac{1}{2} \overline{\nu^c}_R M_R \nu_R + h.c \right)$,

After SSB: $\mathcal{L} \supset (\overline{\nu_L},\ \overline{\nu_R^c}) \begin{pmatrix} \mathbb{O} & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = P_L\, \mathrm{U} \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix}$

$$\mathrm{U} = \mathrm{WV} \qquad \mathrm{U} = \exp \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\theta \\ \theta^\dagger & \mathbb{O} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} I - \frac{1}{2}\theta\theta^\dagger & -\theta \\ \theta^\dagger & I - \frac{1}{2}\theta^\dagger\theta \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^3)$$

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} U_\nu & 0 \\ 0 & U_N \end{pmatrix} \qquad m_\nu \equiv U_\nu \hat{m} U_\nu^T \qquad M_N \equiv U_N \hat{M} U_N^T$$

here $\hat{\Box} = \mathrm{diag}(\dots)$ - diagonal matrix.

$(\nu - N)$**-mixing:** $\Theta \equiv \theta U_N$

PMNS: $U_{\mathrm{PMNS}} = \left(I - \frac{1}{2}\theta^\dagger\theta \right) U_\nu$

Heavy neutrino mixing and νMSM

[Backup slide]

A system of matrix equations for diagonalizing transformation U: ***(leading order θ-accuracy)***

$$\begin{cases} \theta \simeq m_D M_R^{-1}, \\ m_\nu = -\theta M_R \theta^T, \\ M_N \simeq M_R \end{cases} \Rightarrow \quad \text{seesaw I equation} \quad \boxed{m_\nu = -m_D M_N^{-1} m_D^T}$$

Seesaw I equation can be rewritten as a so-called **Casas-Ibarra parametrization:** [Casas J., Ibarra A., Nucl.Phys.B 618 (2001) 171.]

$$I = \Omega\Omega^T = \left[i\sqrt{\tilde{m}^{-1}}U_\nu^\dagger m_D U_N \sqrt{\hat{M}^{-1}}\right]^T \left[-i\sqrt{\tilde{m}^{-1}}U_\nu^\dagger m_D U_N \sqrt{\hat{M}^{-1}}\right],$$

$$m_D = iU^\dagger_{\mathrm{PMNS}}\sqrt{\hat{m}}\Omega\sqrt{\hat{M}^{-1}} \quad \rightarrow \quad \Theta = iU^\dagger_{\mathrm{PMNS}}\sqrt{\hat{m}}\Omega\sqrt{\hat{M}^{-1}}$$

νMSM - model [T.Asaka, M.Shaposhnikov,Phys.Lett.B 620, 17(2005)]

3 sterile neutrino:
N_1 - WDM with $M_1 \sim \mathcal{O}(\text{keV})$
N_2 and N_3 heavy neutrinos with masses $M_2 \simeq M_3 \sim \Lambda_{EW}$, $\Delta = |M_2 - M_3| \ll M_{2,3}$
need for Resonant leptogenesis (lepton asym. $\rightarrow$ baryon asym.)

Casas-Ibarra Parametrization in ISS (p, q=p)

[Backup slide]

Inverse Seesaw Formula

$$m_\nu = m_D (M_R^T)^{-1} \mu (M_R)^{-1} m_D^T \qquad \text{(ISS with } p = q\text{)}$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{m}_D \mathcal{X}^{-1} = (m_D, \ \ \mathbb{O}) \begin{pmatrix} (\mathcal{X}|\mu)^{-1} & (\mathcal{X}|\mu)^{-1} M_R \mu^{-1} \\ \star & \star \end{pmatrix}$$

Casas-Ibarra Parametrization

Through matrix decomposition:

$$\Omega = \sqrt{\hat{m}}^{\,-1} U_\nu m_D (M_R^T)^{-1} \sqrt{\mu} \qquad\qquad m_D = U_\nu^\dagger \sqrt{\hat{m}}\, \Omega \sqrt{\mu}^{\,-1} M_R^T$$

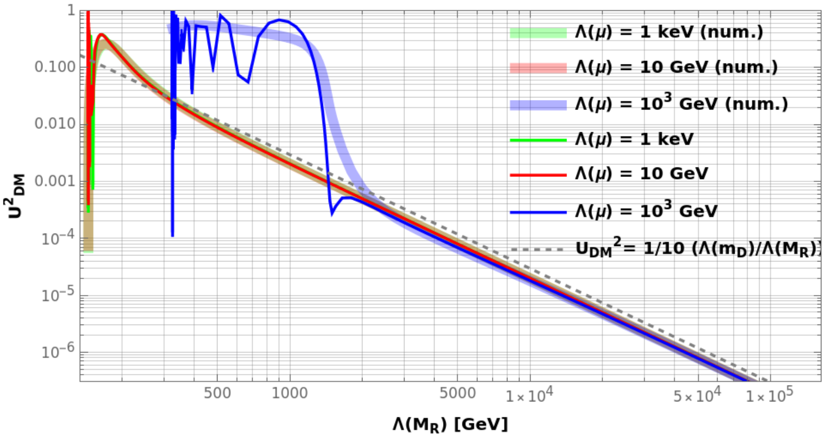
where Ω is orthogonal ($\Omega\Omega^T = I$).

$$\theta_1 = U_\nu^\dagger \sqrt{\hat{m}}\, \Omega \sqrt{\mu} M_R^{-1} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{m_\nu \mu}}{M}\right)$$

$$\theta_2 = U_\nu^\dagger \sqrt{\hat{m}}\, \Omega \sqrt{\mu}^{\,-1} \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{m_\nu}{\mu}}\right)$$

Пределы применимости, численные тесты (1)

[Backup slide]



Пределы применимости, численные тесты (2)

[Backup slide]

2