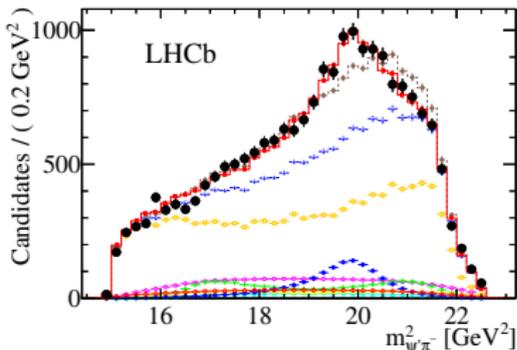
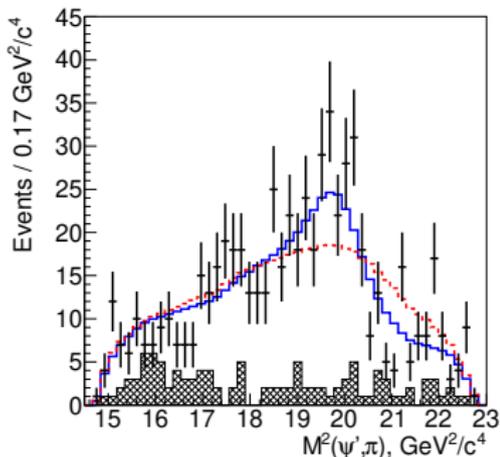


Амплитудный анализ распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ в эксперименте Belle II

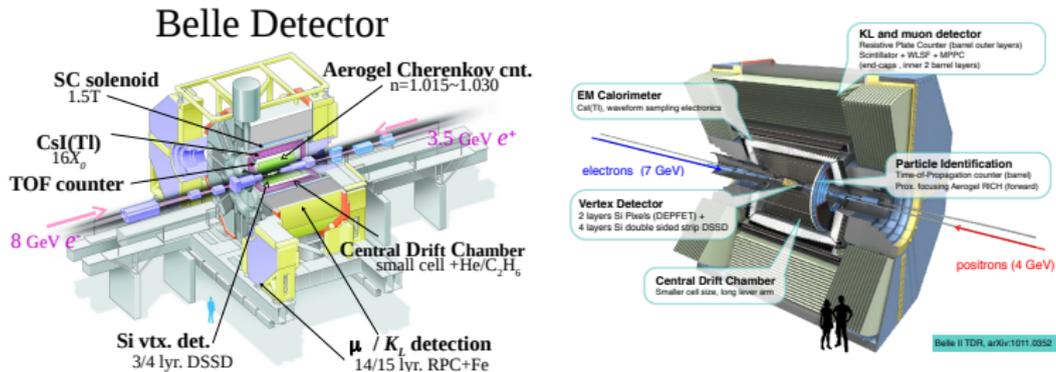
Кирилл Чиликин

Институт ядерной физики имени Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск

Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН
11 марта 2026



Состояние $T_{c\bar{c}1}(4430)^+$ изучалось в экспериментах Belle [PRL **100**, 142001; PRD **80**, 031104; PRD **88**, 074026] и LHCb [PRL **112**, 222002; PRD **92**, 112009] в распаде $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$. Амплитудные анализы других распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ пока не проводились; в частности, нейтральное состояние $T_{c\bar{c}1}(4430)^0$ ещё не известно. Эти распады изучаются в данном анализе.



- Используются все данные эксперимента Belle (711 fb^{-1}) и образец данных Belle II с интегральной светимостью 365 fb^{-1} .
- В отличие от предыдущего анализа Belle, $\psi(2S)$ восстанавливается в каналах l^+l^- и $J/\psi(\rightarrow l^+l^-)\pi^+\pi^-$. Ранее использовался только лептонный канал. Это увеличивает статистику в ~ 2.5 раза, но требует одновременной подгонки.

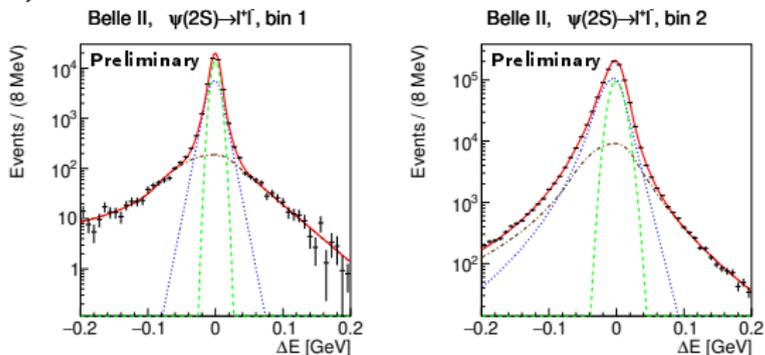
Моделирование показывает наличие пикующихся фонов от $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ и самих распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$. Необходимость их учёта определяет стратегию анализа:

1. Восстанавливаются шесть распадов B : два канала $B \rightarrow \psi(2S)K$ ($B^+ \rightarrow \psi(2S)K^+$, $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$) и четыре канала $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ ($B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$).
2. На предварительной стадии выполняется амплитудный анализ распадов $B \rightarrow \psi(2S)K$ с последующим $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$. Результаты используются для генерации сигнального МК с реалистичным распределением, которое потом используется для параметризации перекрёстного фона в канале $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$.
3. На первой стадии выполняется анализ $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ с упрощённой моделью фона. Его результаты аналогично используются для генерации реалистичного сигнального МК для всех распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ и параметризации перекрёстного фона.
4. На второй стадии выполняется анализ $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ с учётом всех пикующихся фонов.

Критерии отбора оптимизируются при помощи выполнения процедуры оптимизации сигнальной области, описанной далее, с вариацией отдельных критериев. Оптимизация выполняется отдельно для двух групп каналов: с π^+ или без π и с π^0 .

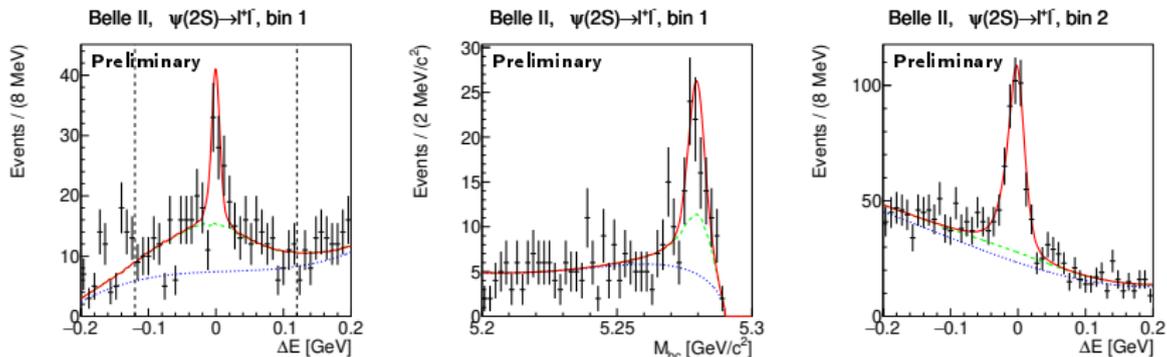
Переменная	Belle		Belle II	
	$B \rightarrow \psi(2S)(\pi^-)K$	$B \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K$	$B \rightarrow \psi(2S)(\pi^-)K$	$B \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K$
Импакт-параметр dr , см	< 2.0	< 2.0	< 4.0	< 4.0
Импакт-параметр $ dz $, см	< 5.0	< 10.0	< 10.0	< 10.0
Идентификация электронов	$R_e > 0.1$	$R_e > 0.1$	$R_e > 0.5$	$R_e > 0.5$
Идентификация мюонов	$R_\mu > 0.1$	$R_\mu > 0.1$	$R_\mu > 0.5$	$R_\mu > 0.5$
Идентификация π	$R_{\pi/K} > 0.1$	$R_{\pi/K} > 0.1$	$R_\pi > 0.1$	$R_\pi > 0.1$
Идентификация K	$R_{K/\pi} > 0.2$	$R_{K/\pi} > 0.6$	$R_K > 0.1$	$R_K > 0.5$
$ M_{\pi^0} - m_{\pi^0} $, МэВ/ c^2	—	$(-11, 10)$	—	$(-16, 12)$
Энергия фотонов, МэВ	—	> 80	—	> 50
Время фотонов $ t $, нс	—	—	—	< 200
$ t/\Delta t $ для фотонов	—	—	—	< 2
Идентификация π^0	—	> 0.75	—	> 0.65
$ M_{K_S^0} - m_{K_S^0} $, МэВ/ c^2	< 30	< 26	< 30	< 24
$M_{J/\psi} - m_{J/\psi} (e^+e^-)$, МэВ/ c^2	$(-100, 70)$	$(-100, 70)$	$(-100, 80)$	$(-100, 80)$
$M_{J/\psi} - m_{J/\psi} (\mu^+\mu^-)$, МэВ/ c^2	$(-60, 35)$	$(-60, 35)$	$(-80, 40)$	$(-80, 40)$
$M_{\psi(2S)} - m_{\psi(2S)} (e^+e^-)$, МэВ/ c^2	$(-100, 70)$	$(-80, 35)$	$(-100, 80)$	$(-80, 40)$
$M_{\psi(2S)} - m_{\psi(2S)} (\mu^+\mu^-)$, МэВ/ c^2	$(-50, 40)$	$(-50, 25)$	$(-60, 30)$	$(-50, 25)$
$M_{\psi(2S)} - m_{\psi(2S)} (J/\psi\pi^+\pi^-)$, МэВ/ c^2	< 7	< 7	< 7	< 6

Разрешение определяется подгонкой взвешенных событий сигнального МК (параметризация приведена в дополнительных слайдах). Пример результатов (Belle II, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$, $\psi(2S) \rightarrow l^+ l^-$):



Красная сплошная линия - результат подгонки, зелёная штриховая линия - первый вклад в ур. (22), синяя пунктирная линия - второй вклад и коричневая штрихпунктирная линия - третий вклад. Бины: $p_\pi < 0.3$ ГэВ/с, $p_\pi > 0.3$ ГэВ/с.

Параметризация приведена в дополнительных слайдах. Пример результатов (Belle II, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$, $\psi(2S) \rightarrow l^+ l^-$):



Красная сплошная линия - результат подгонки, зелёная штриховая линия - полный фон с вкладом от сигнального процесса и синяя пунктирная линия - комбинаторный фон.

- Нейронная сеть, используемая только для каналов с π^0 , создаётся с использованием набора переменных, которые не вносят дополнительных систематических ошибок: хелисити-угла $\Upsilon(4S)$, минимальной энергии дочерних фотонов π^0 в лабораторной системе, хелисити-угла π^0 и азимутального угла дочернего фотона π^0 , определённого как при вычислении спиральных амплитуд.
- Выполняется выбор лучшего кандидата:
 1. Выбранная область по $(\Delta E, M_{bc})$ ($|\Delta E| < 0.2$ ГэВ, $5.2 < M_{bc} < 5.3$ ГэВ/ c^2) разделяется на пять бинов по ΔE и три бина по M_{bc} . Отбор выполняется отдельно для каждого бина и канала распада $\psi(2S)$.
 2. Для каналов $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ отбирается кандидат с наибольшим выходом нейронной сети. Для каналов $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ и $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$, у которых нет нейронной сети, лучший кандидат отбирается случайным образом.

Критерии отбора сигнальной области определяются максимизацией величины

$$F_{\text{opt}} = \frac{\sum_i N_{\text{sig}}^{(i)}}{\sqrt{\sum_i (N_{\text{sig}}^{(i)} + N_{\text{bg}}^{(i)})}}, \text{ где } i - \text{ индекс канала } \psi(2S), \text{ а } N_{\text{sig}}^{(i)} \text{ и } N_{\text{bg}}^{(i)} - \text{ ожидаемые числа}$$

сигнальных и фоновых событий соответственно.

Сигнальная область определяется как $\left(\frac{\Delta E}{R_{\Delta E}^{(i)}}\right)^2 + \left(\frac{M_{\text{bc}} - m_B}{R_{M_{\text{bc}}}^{(i)}}\right)^2 < 1$, где $R_{\Delta E}^{(i)}$ и $R_{M_{\text{bc}}}^{(i)}$ - полуоси её эллипса.

Канал B	Эксперимент	Канал $\psi(2S)$	Параметры			Эффективность				Ожидаемые события		
						$\epsilon_{\text{SR}}^{(i)}$	$\epsilon_S^{(i)}(v_0^{(i)})$		$\epsilon_B^{(i)}(v_0^{(i)})$		$N_{\text{sig}}^{(i)}$	$N_{\text{bg}}^{(i)}$
			$R_{\Delta E}$	$R_{M_{\text{bc}}}$	$v_0^{(i)}$		Train	Test	Train	Test	Train	Train
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$	Belle	$\ell^+ \ell^-$	19.4	6.92	0.00	28.52%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	1969.76	295.47
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	16.4	6.34	0.00	15.37%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	2767.15	622.54
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$	Belle II	$\ell^+ \ell^-$	21.5	6.39	0.00	33.69%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	1167.55	237.30
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	17.4	5.97	0.00	14.46%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	1306.65	346.58
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$	Belle	$\ell^+ \ell^-$	19.0	6.54	0.00	13.38%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	495.47	102.22
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	16.1	5.87	0.00	6.83%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	659.40	190.78
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$	Belle II	$\ell^+ \ell^-$	20.0	6.94	0.00	34.04%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	437.67	79.01
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	17.0	6.88	0.00	14.50%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	486.02	129.38
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$\ell^+ \ell^-$	40.8	6.65	0.232	12.63%	96.9%	97.0%	88.25%	90.46%	447.85	186.24
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	32.2	5.79	0.232	7.10%	91.3%	91.2%	75.43%	76.52%	618.86	337.24
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$\ell^+ \ell^-$	36.0	5.64	0.266	20.82%	93.9%	94.0%	79.20%	79.47%	359.01	183.65
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	31.9	5.53	0.324	9.16%	87.7%	87.7%	64.49%	63.96%	384.70	250.50
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$\ell^+ \ell^-$	33.8	7.14	0.250	5.90%	95.5%	95.5%	89.22%	91.23%	97.41	33.03
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	32.3	4.51	0.292	3.16%	89.7%	89.7%	76.89%	75.04%	128.02	63.00
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$\ell^+ \ell^-$	38.2	5.73	0.268	22.78%	95.7%	95.7%	83.72%	85.38%	130.87	48.59
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+ \ell^-)\pi^+ \pi^-$	26.5	6.25	0.242	9.61%	93.3%	93.4%	86.11%	83.10%	140.36	84.06

Эффективности для распадов $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ включают вероятность распада $B(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ для Belle.

Набор данных для анализа

- После оптимизации применяются полученные критерии для сигнальной области. Контрольные области определены как $0.06 < |\Delta E| < 0.12$ ГэВ, $5.2667 < M_{bc} < 5.3$ ГэВ/ c^2 .
- Подгонка разрешения и распределений по $(\Delta E, M_{bc})$ выполняется снова. Подгонка распределений по $(\Delta E, M_{bc})$ выполняется одновременно для каналов $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$.

Полное число событий в сигнальной области и Эффективность отбора лучшего кандидата:

Канал B	Эксперимент	Канал ψ	Число событий	$\epsilon_{\text{multiple}}$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$\ell^+\ell^-$	2239	95.4%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	3333	90.3%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$\ell^+\ell^-$	1341	94.8%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	1616	90.3%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$\ell^+\ell^-$	631	89.6%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	945	86.5%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$\ell^+\ell^-$	415	91.0%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	482	88.3%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$	Belle	$\ell^+\ell^-$	503	96.0%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	896	91.1%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$	Belle II	$\ell^+\ell^-$	471	89.7%
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	646	87.2%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$	Belle	$\ell^+\ell^-$	107	95.5%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$	Belle	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	176	91.2%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$	Belle II	$\ell^+\ell^-$	119	88.8%
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$	Belle II	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$	174	79.5%

S-волна системы $K\pi$ описывается двухканальной K-матрицей:

$$\begin{aligned}
 K_{11}(s) &= (g_{NR}^{(K\pi^+)})^2 K^{(1/2)}(s) + \sum_{K^*} \frac{(g_{K^*}^{(K\pi^+)})^2}{m_{K^*}^2 - s}, \\
 K_{12}(s) &= K_{21}(s) = g_{NR}^{(K\pi^+)} g_{NR}^{(K\pi^0)} K^{(1/2)}(s) + \sum_{K^*} \frac{g_{K^*}^{(K\pi^+)} g_{K^*}^{(K\pi^0)}}{m_{K^*}^2 - s}, \\
 K_{22}(s) &= (g_{NR}^{(K\pi^0)})^2 K^{(1/2)}(s) + \sum_{K^*} \frac{(g_{K^*}^{(K\pi^0)})^2}{m_{K^*}^2 - s},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $K^{(1/2)}(s)$ - форма нерезонансного вклада, g_{NR} - константы связи для нерезонансного вклада и g_{K^*} - константы связи для резонансов K^* и канала, указанного в верхнем индексе. Все константы связи - действительные числа. Матрица фазового пространства равна

$$\rho_{11} = \begin{cases} \frac{1}{16\pi} \frac{2q^{(K\pi^+)}}{\sqrt{s}} & \text{for } \sqrt{s} > m_K + m_{\pi^+}, \\ \frac{1}{16\pi} \frac{2|q^{(K\pi^+)}|}{\sqrt{s}} & \text{for } \sqrt{s} \leq m_K + m_{\pi^+}, \end{cases} \quad \rho_{22} = \frac{1}{16\pi} \frac{2q^{(K\pi^0)}}{\sqrt{s}}. \tag{2}$$

Порог в системе $K\pi^+$ выше соответствующего порога в системе $K\pi^0$ как для K^{*+} , так и для K^{*0} .

P -вектор задаётся формулой

$$P_1(s) = A^{(B \rightarrow \psi(2S)(K_0^*)_{NR})} g_{NR}^{(K\pi^+)} + \sum_{K^*} \frac{A^{(B \rightarrow \psi(2S)K^*)} g_{K^*}^{(K\pi^+)}}{m_{K^*}^2 - s}, \quad (3)$$

где $A^{(B \rightarrow \psi(2S)(K_0^*)_{NR})}$ и $A^{(B \rightarrow \psi(2S)K^*)}$ - комплексные амплитуды рождения. Выражение для компоненты $K\pi^0$ ($P_2(s)$) аналогично. Амплитуда равна

$$A_{1/2}(s) = [I - iK(s)\rho(s)]^{-1} P(s) F_B^{(LB)}(s), \quad (4)$$

где I - диагональная матрица с элементами, равными 1, $1/2$ обозначает изоспин комбинации (K, π) и $F_B^{(LB)}$ - формфактор распада B , равный

$$F_B^{(LB)}(s) = q_B(s)^{L_B} F_{L_B}^{(BW)}(q_B(s)), \quad (5)$$

где L_B - угловой момент распада B , q_B - импульс дочерней частицы в системе покоя B и $F_L^{(BW)}$ - формфактор Блатта-Вайскопфа. Первый элемент полученного вектора амплитуды используется для канала $K^* \rightarrow K\pi^+$, а второй - для канала $K^* \rightarrow K\pi^0$. Амплитуда $A_{3/2}(s)$ для изоспина $3/2$ аналогична, но в ней есть только нерезонансный вклад. Полная амплитуда равна

$$A(s) = A_{1/2}(s) + A_{3/2}(s). \quad (6)$$

Ограничения на константы связи

Предполагается, что константы связи K^* , $g_{K^*}^{(K\pi^+)}$ и $g_{K^*}^{(K\pi^0)}$, связаны между собой как абсолютные значения коэффициентов Клебша-Гордана:

$$g_{K^*}^{(K\pi^+)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} g_{K^*}, \quad g_{K^*}^{(K\pi^0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} g_{K^*}. \quad (7)$$

Константы связи g_{K^*} полагаются одинаковыми для заряженных и нейтральных резонансов K^* . Аналогичные ограничения накладываются на константы связи для нерезонансного вклада. Массы K_0^{*+} и K_0^{*0} (параметры K -матрицы) также полагаются одинаковыми. Это предположение приводит к немного разному положению полюсов для K_0^{*+} и K_0^{*0} из-за различия в фазовом пространстве.

Нерезонансные вклады для K -матриц с $l = 1/2$ и $l = 3/2$ фиксируются аналогично Далиц-анализу распада $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ в эксперименте FOCUS [PLB **653**, 1] (ур. [8,9] там). Они были параметризованы с использованием данных по рассеянию из статей [NPV **133**, 490; NPV **296**, 493]:

$$K^{(1/2)}(s) = 16\pi \frac{s - 0.23 \text{ ГэВ}^2}{s_{\text{norm}}} (0.72299 - 0.15099\bar{5} + 0.00811\bar{5}^2),$$

$$K^{(3/2)}(s) = 16\pi \frac{s - 0.27 \text{ ГэВ}^2}{s_{\text{norm}}} (-0.22147 + 0.026637\bar{5} - 0.00092057\bar{5}^2),$$
(8)

где $s_{\text{norm}} = m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2$, $\bar{5} = s/s_{\text{norm}} - 1$. Используется дополнительный множитель 16π , потому что в FOCUS было использовано определение матрицы фазового пространства без него из [Annalen Phys. **4**, 404] (ур. [36,37] там).

K -матрица для парциальных волн с большим L

Парциальные волны в системе $K\pi$ с большим угловым моментом также описываются двухканальной K -матрицей. Константы связи равны

$$g_R = \sqrt{m_R \Gamma_R} \sqrt{\frac{m_R}{q(m_R^2)^{2L+1} F_L^{(BW)}(m_R^2)}} \gamma_R, \quad (9)$$

где R - распадающийся резонанс, m_R и Γ_R - его масса и ширина, L - угловой момент и $q(s)$ - импульс дочерней частицы в системе покоя родительской.

Матрица фазового пространства определяется без численных коэффициентов:

$$\tilde{\rho}_{11} = \begin{cases} \frac{q(K\pi^+)}{\sqrt{s}} & \text{for } \sqrt{s} > m_K + m_{\pi^+}, \\ \frac{|q(K\pi^+)|_i}{\sqrt{s}} & \text{for } \sqrt{s} \leq m_K + m_{\pi^+}, \end{cases} \quad \tilde{\rho}_{22} = \frac{q(K\pi^0)}{\sqrt{s}}. \quad (10)$$

Амплитуда задаётся формулой

$$A_{1/2}(s) = n(s) [I - iK(s)\tilde{\rho}(s)n^2(s)]^{-1} P(s) F_B^{(LB)}(s), \quad (11)$$

где n - диагональная матрица, элементы которой включают центробежный барьер и формфактор:

$$n_{jj}(s) = q(s)^L F_L^{(BW)}(s). \quad (12)$$

Если в парциальную волну даёт вклад только один резонанс K^* , амплитуда упрощается до

$$A_{1/2}^{(K\pi^+)}(s) = \frac{A^{(B \rightarrow \psi(2S)K^*)} g_{K^*}^{(K\pi^+)} q(\sqrt{s})^L F(\sqrt{s})}{m_{K^*}^2 - s - im_{K^*} \Gamma_{K^*} \frac{m_R}{\sqrt{s}} \sum_j \left(\frac{q(m_R^2)}{q(s)} \right)^{2L+1} \left(\frac{F_L^{(BW)}(m_R^2)}{F_L^{(BW)}(s)} \right)^2 (\gamma_{K^*}^{(j)})^2}. \quad (13)$$

Это стандартная форма релятивистской амплитуды Брейта-Вигнера.

- Известные параметры Брейта-Вигнера используются для всех состояний, кроме $K^*(892)$.
- В P -волну системы $K\pi$ дают вклад три резонанса: $K^*(892)$, $K^*(1410)$ и $K^*(1680)$, поэтому их параметры больше не соответствуют параметрам Брейта-Вигнера. Разница значима для $K^*(892)^+$ и $K^*(892)^0$, поэтому их параметры при подгонке свободны.
- Константы связи $\gamma_{K^*}^{(K\pi^+)}$ и $\gamma_{K^*}^{(K\pi^0)}$ зафиксированы на абсолютных значениях коэффициентов Клебша-Гордана: $\gamma_{K^*}^{(K\pi^+)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\gamma_{K^*}^{(K\pi^0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

K -матрица для $T_{c\bar{c}}$ и $T_{c\bar{c}s}$

- Состояния $T_{c\bar{c}}$ и $T_{c\bar{c}s}$ параметризуются аналогично парциальным волнам $K\pi$ с $L \geq 1$ с использованием одно- или двухканальной K -матрицы в зависимости от числа возможных парциальных волн в распаде $T_{c\bar{c}} \rightarrow \psi(2S)\pi$ или $T_{c\bar{c}s} \rightarrow \psi(2S)K$, соответственно.
- Масса $m_{T_{c\bar{c}}}$ и ширина $\Gamma_{T_{c\bar{c}}}$ - свободные параметры.
- В случае одноканальной K -матрицы константа связи $\gamma_{T_{c\bar{c}}}$ фиксируется на значении 1. В случае двухканальной K -матрицы парциальные волны дают вклад в одно и то же конечное состояние. Константы связи параметризуются как

$$\gamma_{T_{c\bar{c}}}^{L_1} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \gamma_{T_{c\bar{c}}}^{L_2} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}, \quad (14)$$

где $r = \gamma_{T_{c\bar{c}}}^{L_2} / \gamma_{T_{c\bar{c}}}^{L_1}$ - отношение между константами связи для парциальных волн с большим угловым моментом L_2 и меньшим угловым моментом L_1 .

Функция плотности сигнала

Функция плотности сигнала для распадов B^0 и B^+ равна

$$S_B(\Phi) = \sum_{\lambda_{\ell^+} - \lambda_{\ell^-} = -1, 1} \left| \sum_{\lambda_{\psi(2S)} = -1, 0, 1} A_{\lambda_{\psi(2S)}}(\Phi) e^{i\lambda_{\psi(2S)}\varphi_{\ell^+}^{[1]}} d_{\lambda_{\psi(2S)} \lambda_{\ell^+} - \lambda_{\ell^-}}^1(\theta_{\psi(2S)}^{[1]}) \right|^2 \quad (15)$$

для канала $\psi(2S) \rightarrow \ell^+ \ell^-$ и

$$S_B(\Phi) = \sum_{\lambda_{\ell^+} - \lambda_{\ell^-} = -1, 1} \left| \sum_{\substack{\lambda_{\psi(2S)} = -1, 0, 1 \\ \lambda_{J/\psi} = -1, 0, 1}} A_{\lambda_{\psi(2S)}}(\Phi) e^{i\lambda_{\psi(2S)}\varphi_{J/\psi}^{[2]}} d_{\lambda_{\psi(2S)} \lambda_{J/\psi}}^1(\theta_{\psi(2S)}^{[2]}) e^{i\lambda_{J/\psi}\varphi_{\ell^+}^{[2]}} \right. \\ \left. \times d_{\lambda_{J/\psi} \lambda_{\ell^+} - \lambda_{\ell^-}}^1(\theta_{J/\psi}^{[2]}) \left[A_0(M_{\pi^+\pi^-}^2) + d_{00}^2(\theta_{f_J}^{[2]}) A_2(M_{\pi^+\pi^-}^2) \right] \right|^2 \quad (16)$$

для канала $\psi(2S) \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$, где

$$A_{\lambda_{\psi(2S)}}(\Phi) = \sum_{J(K^*)} d_{\lambda_{\psi(2S)} 0}^{J(K^*)}(\theta_{K^*}^{(1)}) A_{\lambda_{\psi(2S)}}^{(B \rightarrow \psi(2S) K^*)}(M_{K\pi}) \\ + \sum_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)} = -1, 0, 1} (-1)^{\lambda_{\psi(2S)}} d_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)} \lambda_{\psi(2S)}}^1(\beta_2) \sum_{J(T_{c\bar{c}})} d_{0 \tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{J(T_{c\bar{c}})}(\theta_{T_{c\bar{c}}}^{(2)}) \\ \times \sum_{P(T_{c\bar{c}})} A_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{(T_{c\bar{c}} \rightarrow \psi(2S)\pi)}(M_{\psi(2S)\pi})$$

...(продолжение на следующей странице)

...(начало на предыдущей странице)

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)} = -1, 0, 1} (-1)^{\lambda_{\psi(2S)}} d_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)} \lambda_{\psi(2S)}}^1(\beta_3) \sum_{J(T_{c\bar{c}s})} d_{0 \tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{J(T_{c\bar{c}s})}(\theta_{T_{c\bar{c}s}}^{(3)}) \\
 & \times \sum_{P(T_{c\bar{c}s})} A_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{(T_{c\bar{c}s} \rightarrow \psi(2S)K)}(M_{\psi(2S)K}),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $A_{\lambda_{\psi(2S)}}^{(B \rightarrow \psi(2S)K^*)}$, $A_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{(T_{c\bar{c}} \rightarrow \psi(2S)\pi)}$, и $A_{\tilde{\lambda}_{\psi(2S)}}^{(T_{c\bar{c}s} \rightarrow \psi(2S)K)}$ - амплитуды с определённой спиральностью, которые выражаются через парциально-волновые амплитуды с использованием ур. (B5) из [Annals Phys. 7, 404]:

$$\langle JM; LS | JM; \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C(LSJ; 0, \lambda_1 - \lambda_2) C(s_1 s_2 S; \lambda_1, -\lambda_2), \tag{18}$$

Функция плотности сигнала $S_{\bar{B}}$ для \bar{B}^0 и B^- задаётся теми же уравнениями с противоположным знаком азимутальных углов. В канале $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ невозможно различить B^0 и \bar{B}^0 -мезоны, поэтому функция плотности сигнала определяется как

$$S(\Phi) = \frac{S_B(\Phi) + S_{\bar{B}}(\Phi)}{2}. \tag{19}$$

Минимизируется функция

$$\mathcal{F} = \sum_i -2 \ln \left(f_S \frac{S(\Phi_i)}{\sum_j w_j S(\Phi_j)} + f_B \frac{B(\Phi_i)}{\sum_j w_j B(\Phi_j)} + \sum_k f_B^{(k)} \frac{B^{(k)}(\Phi_i)}{\sum_j w_j B^{(k)}(\Phi_j)} \right) + \frac{(N_B - (N_B)_0)^2}{\sigma_{N_B}^2} + \sum_k \frac{(N_B^{(k)} - (N_B^{(k)})_0)^2}{\sigma_{N_B^{(k)}}^2}, \quad (20)$$

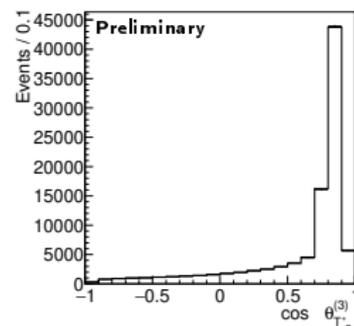
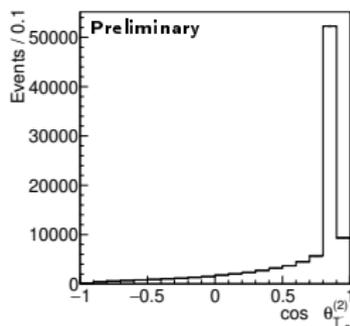
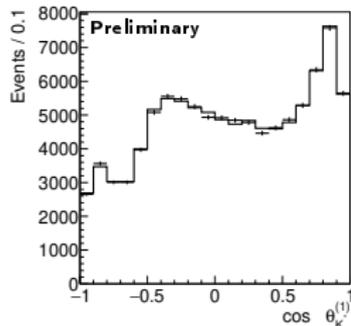
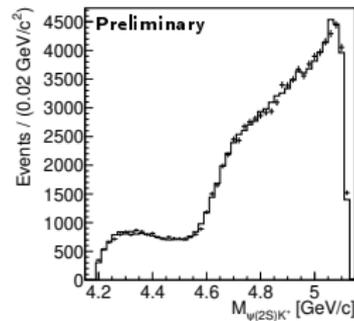
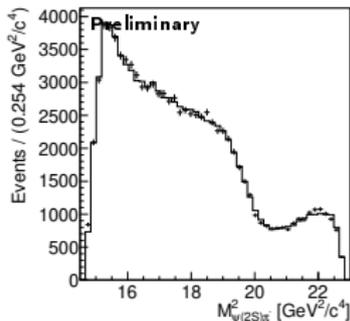
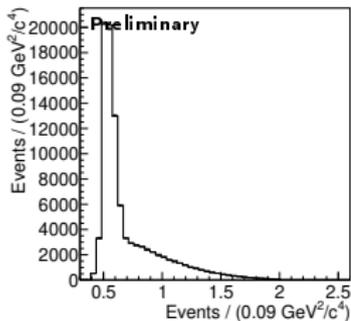
где индекс i проходит по событиям в данных, индекс j проходит по событиям сигнального МК, сгенерированным с равномерным распределением по фазовому пространству и восстановленным с теми же критериями отбора, что и данные, $B(\Phi)$ - функция плотности фона, w_j - вес j -го события МК, f_S и $f_B^{(k)}$ - доли сигнальных и фоновых событий соответственно, вычисляемые как $f_S = N_S/N$, $f_B^{(k)} = N_B^{(k)}/N$, где N_S и N_B - выходы сигнала и фона, $N = N_S + \sum_k N_B^{(k)}$ и k - номер источника фона. При параметризации фона также используются источники фона:

$$\mathcal{F} = \sum_i -2 \ln \left(\tilde{f}_B \frac{B(\Phi_i)}{\sum_j w_j B(\Phi_j)} + \sum_k \tilde{f}_B^{(k)} \frac{B^{(k)}(\Phi_i)}{\sum_j w_j B^{(k)}(\Phi_j)} \right) + \sum_k \frac{(N_B^{(k)} - (N_B^{(k)})_0)^2}{\sigma_{N_B^{(k)}}^2}, \quad (21)$$

где доли компонентов \tilde{f}_B и $\tilde{f}_B^{(k)}$ вычислены для контрольной области.

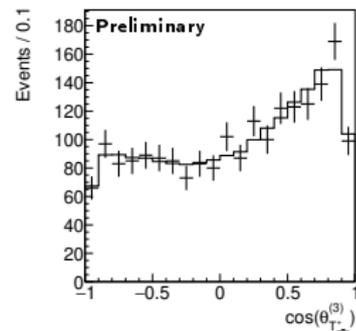
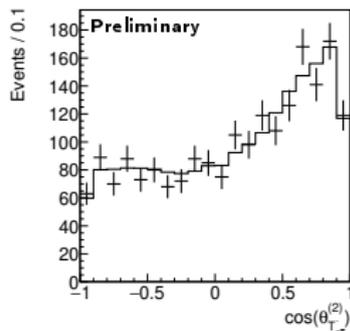
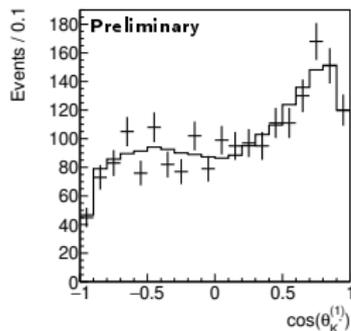
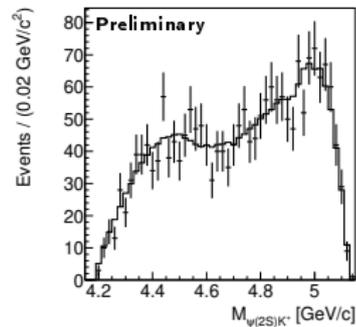
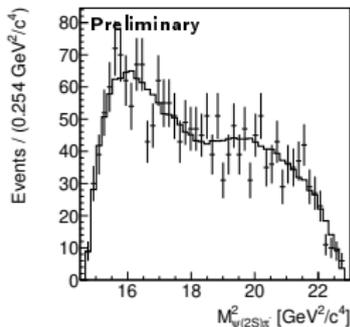
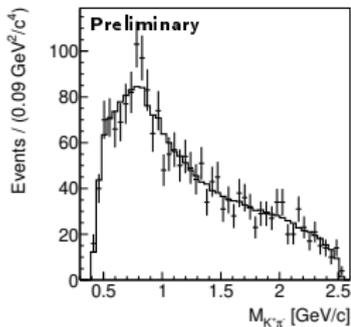
Параметризация фона от $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$

Пикующийся фон от $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ в канале $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ параметризуется из сигнального МК сгенерированного в соответствии с результатом амплитудного анализа $B \rightarrow \psi(2S)K$. Пример результатов (Belle, $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$, $J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$, контрольные области):



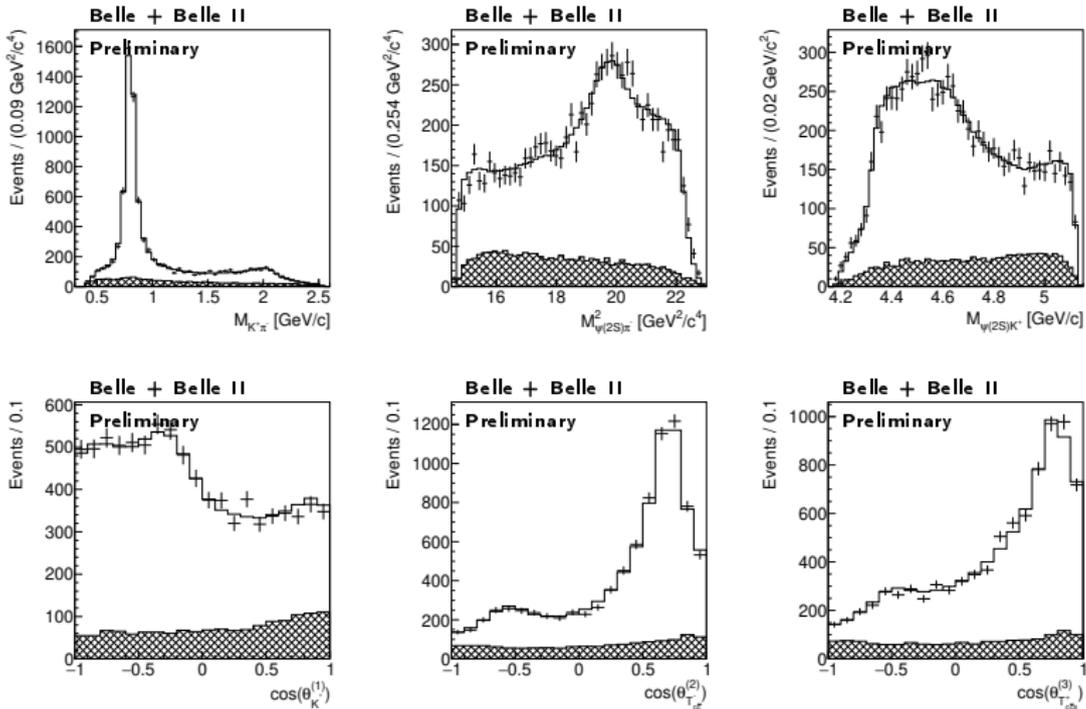
Параметризация фона

Затем параметризуется фон (для $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ при этом есть источник фона от $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$). Пример результатов (Belle II, $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$, $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$, контрольные области):



Подгонка сигнала, стадия 1

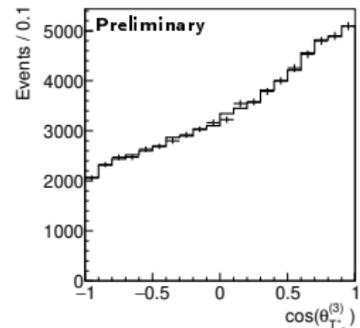
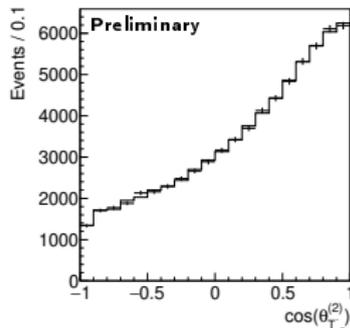
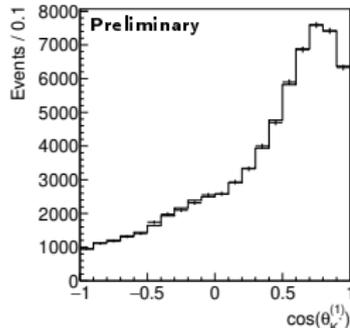
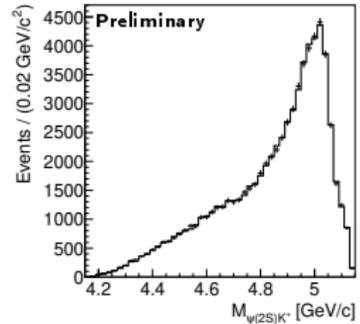
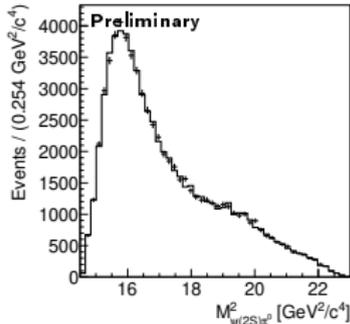
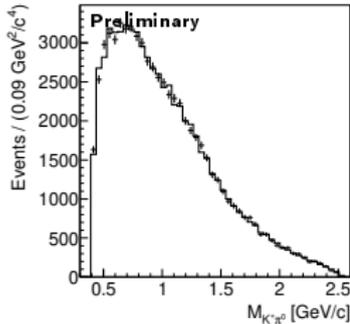
Проводится одновременная подгонка всех четырёх изоспиново-сопряжённых каналов: $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$. Пример результатов ($B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$, сумма всех каналов $\psi(2S)$, Belle + Belle II):



На этой стадии нет получения физических результатов. Вместо этого модель используется для генерации реалистичного сигнала своего МКод в всех 4 распадах

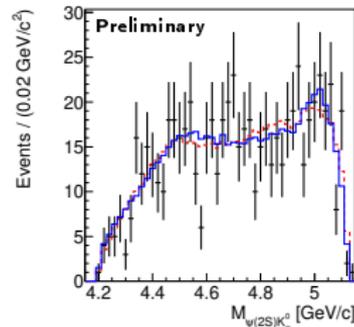
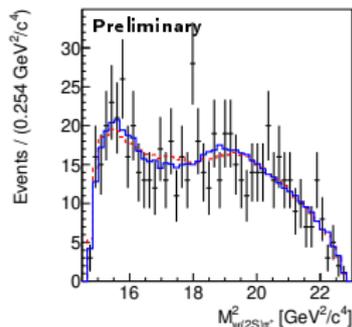
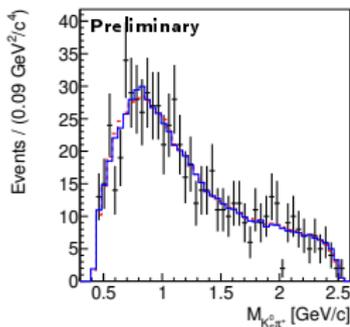
Перекрёстные фоны, фон от сигнального процесса

После этого с использованием реалистичного сигнального МК параметризуются перекрёстные фоны от $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ и фон от сигнального процесса. Пример результатов (Belle, перекрёстный фон: события $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ реконструированные как $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$, $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$, контрольные области):



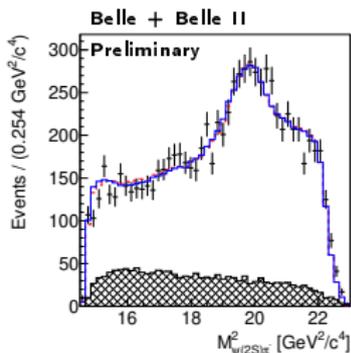
Перед 2 стадией анализа подгонки разрешения и распределений по $(\Delta E, M_{bc})$ выполняются снова. Подгонка распределений по $(\Delta E, M_{bc})$ выполняется одновременно для всех распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ и $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$. Выходы сигнала приведены в дополнительных слайдах.

Фон подгоняется с использованием той же функции, что и ранее, но с новыми пикующими фонами. Пример результатов ($B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$, Belle II, $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$; красная штриховая линия - результат стадии 1, синяя сплошная линия - результат стадии 2):

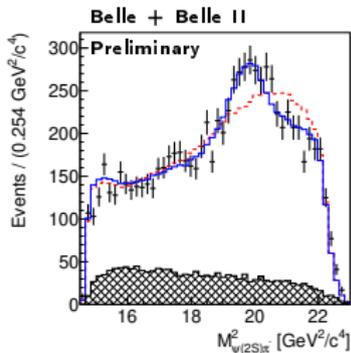


Разность между полученными значениями функции правдоподобия \mathcal{F} для первой и второй стадий составляет от -7.6 до 90.5. Правдоподобие улучшается для всех каналов, кроме $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ с $\psi(2S) \rightarrow \ell^+\ell^-$ для данных Belle II, для которого он становится незначимо хуже.

Аналогично, сигнальная модель стадии 2 остаётся той же, но добавляются источники пикующего фона. Результаты стадии 2 (сплошная синяя линия) и стадии 1 (красная штриховая линия) сравниваются для $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ (слева) и $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$ (справа) (сумма по экспериментам и каналам $\psi(2S)$):



Улучшение по сравнению со стадией 1 составляет 6.8σ . Результаты подгонки отличаются главным образом в области низких энергий π . Различие очень мало для каналов с π^+ в конечном состоянии, а для каналов с π^0 в конечном состоянии оно значимо.



$T_{c\bar{c}1}(4430)^+$: ЗАКРЫТО

$T_{c\bar{c}1}(4430)^0$: ЗАКРЫТО

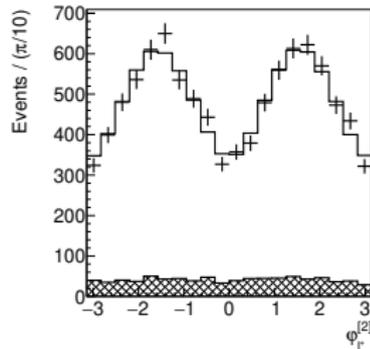
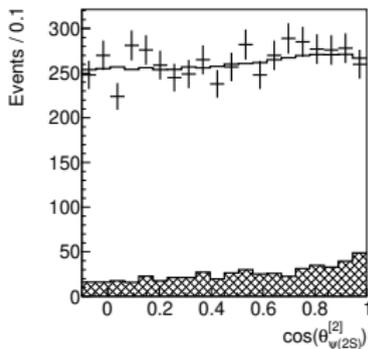
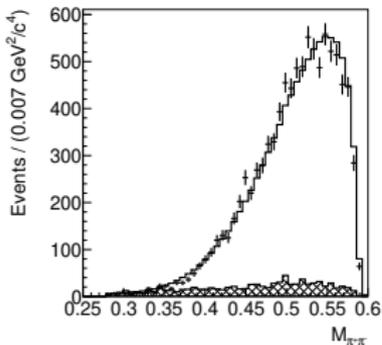
Уровни исключения:

J^P	$T_{c\bar{c}1}(4430)^+$
0^-	ЗАКРЫТО
1^-	ЗАКРЫТО
2^+	ЗАКРЫТО
2^-	ЗАКРЫТО

- Разработан метод амплитудного анализа распадов $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ с одновременной подгонкой всех сопряжённых по изоспину каналов: $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$, $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$, и $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$.
- Пока численные результаты закрыты для представления вне коллаборации. Результаты для состояния $T_{c\bar{c}1}(4430)^+$ воспроизводят более ранние результаты Belle и LHCb.

Дополнительные слайды

$B \rightarrow \psi(2S)K$ signal fit results



All experiments and channels are summed. The points with error bars are data, the solid line is the fit result, and the hatched histograms are the background estimated from ΔE sidebands.

The resulting value of κ (real parameter describing $\pi\pi$ D -wave contribution) is 0.1956 ± 0.0037 , where the error is statistical only; it is consistent (2.4σ greater) with BES value (from $e^+e^- \rightarrow \psi(2S) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$) $\kappa = 0.183 \pm 0.002 \pm 0.003$. The Belle result may be slightly shifted due to unaccounted non- $\psi(2S)$ $B^+ \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-K^+$ events. Thus, the $B^+ \rightarrow \psi(2S)K^+$ model is considered to be validated.

The resolution in $(\Delta E, M_{bc})$ is parameterized by the function

$$S(\Delta E, M_{bc}) = \begin{cases} \frac{N}{\mathcal{S}_{\Delta E} \mathcal{S}_{M_{bc}}} (N_1 G_a(X_1) G_a(Y_1) & \text{for } M_{bc} \leq (M_{bc})_{\max} \\ \quad + N_2 F_{CB}(X_2) F_{CB}(Y_2) & \\ \quad + N_3 F_{CB}(X_3) F_{CB}(Y_3)) & \\ 0 & \text{for } M_{bc} > (M_{bc})_{\max}, \end{cases} \quad (22)$$

where $(M_{bc})_{\max} = (\sqrt{s})_{\max}/2$, N is common normalization, N_1 , N_2 , and N_3 are normalizations of individual terms, G_a is an asymmetric Gaussian function, F_{CB} is an asymmetric Crystal Ball function, and X_i and Y_i are rotated variables that are given by

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E - (\Delta E)_i \\ M_{bc} - (M_{bc})_i \end{pmatrix} & \text{for } i = 1, \\ \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E' - (\Delta E')_1 - (\Delta E')_i \\ M'_{bc} - (M'_{bc})_1 - (M'_{bc})_i \end{pmatrix} & \text{for } i = 2, 3, \end{cases} \quad (23)$$

where α_i is the rotation angle; $\Delta E'$ and M'_{bc} are scaled variables given by

$$\Delta E' = \frac{\Delta E - (\Delta E)_0}{S_{\Delta E}}, \quad M'_{bc} = \frac{M_{bc} - (M_{bc})_0}{S_{M_{bc}}}, \quad (24)$$

where $S_{\Delta E}$ and $S_{M_{bc}}$ are the resolution scaling coefficients in ΔE and M_{bc} , respectively, and $((\Delta E)_0, (M_{bc})_0)$ is the central point; $(\Delta E')_i$ and $(M'_{bc})_i$ define the central points for rotations. For resolution fit, both resolution scaling coefficients are fixed at 1 and the central point $((\Delta E)_0, (M_{bc})_0)$ is fixed at $(0, m_B)$.

The resolution is determined from a binned maximum likelihood fit to signal MC events weighted by their efficiency-correction coefficients. The weights include differences of π^+ and K^+ fake rates in data and MC. This has no effect on resolution fits, but changes results of $(\Delta E, M_{bc})$ fits and cross-feed background parameterization compared to B2GM version.

The $(\Delta E, M_{bc})$ distribution is fitted using the function

$$N_S[S(\Delta E, M_{bc}) + N_B^{(\text{sig})}B^{(\text{sig})}(\Delta E, M_{bc})] + C(\Delta E, M_{bc}), \quad (25)$$

where N_S is the signal yield, S is the signal PDF, N_B^{sig} is the ratio of signal-process background yields in data and MC, $B^{(\text{sig})}$ is the signal-process background distribution obtained from MC by bilinear interpolation, and C is the combinatorial-background density function given by

$$C(\Delta E, M_{bc}) = P_3(\Delta E, M_{bc}) \times \begin{cases} \sqrt{m_0 - M_{bc}} \exp[-a(m_0 - M_{bc})] & \text{for } M_{bc} < m_0 - \Delta m, \\ \sqrt{\Delta m} \exp[-a\Delta m + (a - \frac{1}{2\Delta m})(M_{bc} - (m_0 - \Delta m))] & \text{for } m_0 - \Delta m \leq M_{bc} < m_{\text{thr}}, \\ 0 & \text{for } m_{\text{thr}} \leq M_{bc}. \end{cases} \quad (26)$$

where P_3 is a two-dimensional third-order polynomial, m_{thr} is the threshold, m_0 is the effective threshold, a is a rate parameter, and Δm is the difference between the effective threshold and the transition point.

The threshold mass m_{thr} is fixed at the maximal value of $\sqrt{s}/2$. The parameters of the signal density function are fixed at the results of the resolution fit except for the central point $((\Delta E)_0, (M_{bc})_0)$ and resolution scalings $S_{\Delta E}$ and $S_{M_{bc}}$, which are released to take the difference between the MC simulation and data into account.

The expected number of signal events for $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ is calculated as

$$N_{\text{sig}}^{(i)} = 2 N_{\Upsilon(4S)} \mathcal{B}(\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-) \mathcal{B}(B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+) \mathcal{B}(\psi(2S) \rightarrow i) \epsilon_{\text{SR}}^{(i)} \epsilon_S^{(i)}(v_0^{(i)}) \quad (27)$$

where $N_{\Upsilon(4S)}$ is the number of $\Upsilon(4S)$ events, $\mathcal{B}(\psi(2S) \rightarrow i)$ is the branching fraction of the $\psi(2S)$ to its i -th decay channel, $\epsilon_{\text{SR}}^{(i)}$ is the reconstruction efficiency for the specific signal region SR before the requirement ($v > v_0$) on the neural-network output variable v for the signal events, and $\epsilon_S^{(i)}(v_0^{(i)})$ is the efficiency of the neural-network output requirement. The signal-region-dependent reconstruction efficiency is calculated as

$$\epsilon_{\text{SR}}^{(i)} = \epsilon_R^{(i)} \int_{\text{SR}} S_i(\Delta E, M_{\text{bc}}) d\Delta E dM_{\text{bc}}, \quad (28)$$

where $\epsilon_R^{(i)}$ is the reconstruction efficiency, and S_i is the signal probability density function for i -th J/ψ decay channel (the integral of S_i over the signal region is the efficiency of the signal region selection).

The expected number of background events is calculated as

$$N_{\text{bg}} = \epsilon_B(v_0) \int_{\text{SR}} B(\Delta E, M_{\text{bc}}) d\Delta E dM_{\text{bc}}, \quad (29)$$

where $\epsilon_B(v_0)$ is the efficiency of the neural-network output requirement for the background events and B is the background density function.

MC events are used for parameterization of cross-feed background, but it is necessary to determine the distribution in data. Thus, a fit with weighted data is used. There are no background sources. The likelihood function is

$$\mathcal{F} = \sum_i -2w_i \ln \left(\frac{B^{(k)}(\Phi_i)}{\sum_j w_j B^{(k)}(\Phi_j)} \right), \quad (30)$$

where $N^{(k)}$ is the total number of reconstructed cross-feed events.

$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ background fit

In the B -meson rest frame

$$M_{K^-\pi^+}^2 = m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 + 2\sqrt{E_{\pi^-}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2} E_{\pi^+} - 2(\vec{p}_{\pi^-}, \vec{p}_{\pi^+}) \quad (31)$$

for wrong identification and

$$m_{K_S^0}^2 = m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^+}^2 + 2E_{\pi^-} E_{\pi^+} - 2(\vec{p}_{\pi^-}, \vec{p}_{\pi^+}) \quad (32)$$

for correct identification, where

$$E_{\pi^-} = \frac{m_{B^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - M_{\psi(2S)\pi^+}^2}{2m_{B^0}} \quad (33)$$

is the energy of the incorrectly identified π meson. Subtracting Eq. (31) from Eq. (32), one gets

$$M_{K^-\pi^+}^2 - m_{K_S^0}^2 = m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2 + 2E_{\pi^+} \left(\sqrt{E_{\pi^-}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2} - E_{\pi^-} \right) \quad (34)$$

The energy of the correctly identified π meson is

$$E_{\pi^+} = \frac{m_{B^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - M_{\psi(2S)\pi^-}^2}{2m_{B^0}}. \quad (35)$$

Using the relation $2m_{\pi^+}^2 + m_{\psi(2S)}^2 + m_{B^0}^2 = M_{\psi(2S)\pi^-}^2 + M_{\psi(2S)\pi^+}^2 + m_{K_S^0}^2$, the formula becomes

$$(M_{K^-\pi^+}^2)_{K_S^0} = m_{K_S^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2 + \frac{m_{K_S^0}^2 - m_{\pi^+}^2 - m_{\psi(2S)}^2 + M_{\psi(2S)\pi^+}^2}{m_{B^0}} \left(\sqrt{E_{\pi^-}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2} - E_{\pi^-} \right) \quad (36)$$

This expression is an approximation ignoring B -meson energy change and kinematic-fitting effects. Further corrections should be applied to get the actual cross-feed background peak position.

$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ background fit

The $B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ background model is given by

$$\begin{aligned}
 B_{K_S^0}(\Phi) = & \\
 & N \exp [P_k(\Phi) + N_{\text{thr}}(1 - x_{\psi(2S)\pi})^a] P_4(\cos \theta_{\psi(2S)}) \\
 & + N_{K_S^0} \exp \left[P_l^{(K_S^0)}(\Phi_1) + P_m(\cos \theta_{K^*}^{(1)}) \right] P_n^{(K_S^0)}(\cos \theta_{\psi(2S)}) \text{Sig}(M_{\psi(2S)\pi}^2) \\
 & \times [(1 - f_2)G_1((M_{K\pi} - (M_{K\pi})_{K_S^0})(1 + P_2(\Phi_1)), D_1(\Phi_1), \sigma_1(\cos \theta_{K^*}^{(1)})(1 + \sigma_1^{(\text{corr})}(\Phi_2))) \\
 & + f_2 G_2((M_{K\pi} - (M_{K\pi})_{K_S^0})(1 + P_2(\Phi_1)), D_1(\Phi_1) + D_2, \sigma_2(\cos \theta_{K^*}^{(1)}))],
 \end{aligned} \tag{37}$$

where N and $N_{K_S^0}$ are normalizations, P_k and $P_l^{(K_S^0)}$ are main polynomials for the non-peaking background and the K_S^0 peak, respectively, their orders k and l being up to six depending on the channel; $P_4(\cos \theta_{\psi(2S)})$ and $P_n^{(K_S^0)}(\cos \theta_{\psi(2S)})$ are polynomials describing the dependence on $\cos \theta_{\psi(2S)}$, the order n of the K_S^0 polynomial being 8 for the background region and 4 for the signal region; P_m is polynomial describing the dependence of the K_S^0 peak on the K^* helicity angle, its order m being up to 10 depending on the channel; G_1 and G_2 are Gaussian functions, P_2 is a two-dimensional polynomial without a constant term, D_1 is a one-dimensional eighth-order polynomial, σ_1 and σ_2 are one-dimensional polynomials of order up to four depending on the channel, $\sigma_1^{(\text{corr})}$ is a second-order polynomial. Φ_1 is reduced phase space with no dependence on $M_{K\pi}$, and Φ_2 is reduced phase space with no dependence on $M_{K\pi}$ and on $\cos \theta_{K^*}^{(1)}$.

The combinatorial-background density is given by

$$\begin{aligned}
 B_{K_S^0}(\Phi) = & N \exp [P_k(\Phi)] (1 + bN_b) \\
 & + N_{K^*(892)} \exp [P_1(\Phi_1)] \frac{1}{|m_{K^*(892)}^2 - M_{K\pi}^2 - im_{K^*(892)} \Gamma_{K^*(892)}|^2} \\
 & + N_{K_S^0}^{(f_J)} \exp P_1(\Phi_3)
 \end{aligned} \quad (38)$$

where N is normalization, P_k is a polynomial describing non-peaking combinatorial background (its order k being up to 7 for the terms containing $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ Dalitz-plot variables and up to 5 for other terms), b is B -meson flavor, N_b describes the normalization dependence on flavor, $N_{K^*(892)}$ is the normalization of the $K^*(892)$ background, $N_{K_S^0}^{(f_J)}$ is the normalization of the K_S^0 background in the f_J invariant mass, and Φ_3 is reduced phase space without M_{f_J} . A simple constant-width Breit-Wigner matrix element is used for the $K^*(892)$. It is not necessary to use the relativistic Breit-Wigner formula because the background has an additional probability for the event to contribute to the background, thus, its shape generally does not coincide exactly with the physical signal. The K_S^0 background is added for $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$ only.

Cross-feed background

The density for the cross-feed from $B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ to $B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ is similar to Eq. (37), with additional terms for contribution of real $K^*(892)$ mesons, background from real K_S^0 in the f_J invariant mass, and dependence on the B -meson flavor b :

$$\begin{aligned}
 B_{K_S^0}(\Phi) = & \\
 & N \exp [P_k(\Phi) + N_{\text{thr}}(1 - x_{\psi(2S)\pi})^a] P_4(\cos \theta_{\psi(2S)}) [1 + b(N_b + P_\beta(\Phi) \cos^2(\varphi_{\ell^+} - \alpha))] \\
 & + N_{K^*(892)} \exp[P_1(\Phi_1)] \frac{1}{|m_{K^*(892)}^2 - M_{K\pi}^2 - im_{K^*(892)}\Gamma_{K^*(892)}|^2} \\
 & + N_{K_S^0}^{(f_J)} \exp P_2(\Phi_3) \\
 & + N_{K_S^0} \exp \left[P_l^{(K_S^0)}(\Phi_1) + P_m(\cos \theta_{K^*}^{(1)}) \right] P_n^{(K_S^0)}(\cos \theta_{\psi(2S)}) \text{Sig}(M_{\psi(2S)\pi}^2) \\
 & \quad \times [(1 - f_2)G_1((M_{K\pi} - (M_{K\pi})_{K_S^0})(1 + P_2(\Phi_1)), D_1(\Phi_1), \sigma_1(\cos \theta_{K^*}^{(1)})(1 + \sigma_1^{\text{corr}}(\Phi_2))) \\
 & \quad + f_2G_2((M_{K\pi} - (M_{K\pi})_{K_S^0})(1 + P_2(\Phi_1)), D_1(\Phi_1) + D_2, \sigma_2(\cos \theta_{K^*}^{(1)}))],
 \end{aligned} \tag{39}$$

where N_b is the normalization of flavor-dependent part, P_β is a zeroth-order polynomial, the angle α is a fit parameter, $N_{K^*(892)}$ is the normalization of the $K^*(892)$ background, $N_{K_S^0}^{(f_J)}$ is the normalization of the K_S^0 background in the f_J invariant mass, and Φ_3 is reduced phase space without M_{f_J} . The K_S^0 background in the f_J invariant mass is added for $\psi(2S) \rightarrow J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$ only.

For other cross-feed backgrounds, the density is given by

$$\begin{aligned}
 B(\Phi) = & N \exp(P_k(\Phi)) T_\pi(\Phi) T_K(\Phi) [1 + b(N_b + P_\beta(\Phi) \cos^2(\varphi_{\ell^+} - \alpha))] \\
 & + N_{K_S^0}^{(f_J)} \exp P_2(\Phi_3).
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

where the phase-space variables for the decay chain via $T_{c\bar{c}s}^-$ are used, the polynomial $P_k(\Phi)$ contains the terms up to order 20 for terms containing $B \rightarrow \psi(2S)\pi K$ Dalitz-plot variables and up to sixth order for other terms, T_π and T_K are threshold functions given by

$$T_\pi(\Phi) = \frac{1}{1 + \exp[-k(\Phi)(E_\pi - E_\pi^{(0)}(\Phi))]}, \tag{41}$$

where the rate parameter k and threshold $E_\pi^{(0)}$ are polynomials up to the second order.

The density for signal-process background is similar to Eq. (40):

$$\begin{aligned}
 B(\Phi) = & N \exp(P_k(\Phi)) T_\pi(\Phi) T_K(\Phi) [1 + b(N_b + P_\beta(\Phi) \cos^2(\varphi_{\ell^+} - \alpha))] \\
 & + N_{K^*(892)} \exp[P_4(\Phi_1)] \frac{1}{|m_{K^*(892)}^2 - M_{K\pi}^2 - im_{K^*(892)} \Gamma_{K^*(892)}|^2} \\
 & + N_{K_S^0}^{(f_J)} \exp P_2(\Phi_3),
 \end{aligned} \tag{42}$$

where the order of the main polynomial k may reach 28 for Dalitz-plot variables depending on the channel, and an additional term for the $K^*(892)$ contribution is added similar to Eq. (39) but with a higher order of the normalization polynomial which may reach four. The $K^*(892)$ mass and width depend on the phase space and described by first-order polynomials.

Signal and background yields in the signal region

B channel	Experiment	Component	$\ell^+\ell^-$	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	Signal	$1946.1 \pm 40.8 \pm 4.3$	$2823.6 \pm 58.7 \pm 4.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	Signal-process background	$86.5 \pm 2.0 \pm 0.3$	$107.2 \pm 2.5 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ cross-feed	$4.8 \pm 0.1 \pm 0.0$	$5.4 \pm 0.1 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ cross-feed	$15.4 \pm 0.6 \pm 0.1$	$18.6 \pm 0.7 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^+$ cross-feed	$24.3 \pm 1.0 \pm 0.6$	$35.2 \pm 1.4 \pm 1.7$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	Combinatorial background	$170.3 \pm 5.3 \pm 0.5$	$368.1 \pm 9.4 \pm 1.7$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	Signal	$1095.5 \pm 36.7 \pm 10.8$	$1338.6 \pm 40.7 \pm 26.6$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	Signal-process background	$52.6 \pm 2.3 \pm 0.4$	$50.4 \pm 1.8 \pm 0.8$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ cross-feed	$4.8 \pm 0.2 \pm 0.1$	$4.6 \pm 0.2 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ cross-feed	$8.1 \pm 0.4 \pm 0.1$	$7.3 \pm 0.4 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^+$ cross-feed	$14.5 \pm 0.8 \pm 0.1$	$16.6 \pm 0.8 \pm 0.3$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	Combinatorial background	$157.7 \pm 7.5 \pm 6.8$	$209.9 \pm 7.5 \pm 17.0$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	Signal	$548.3 \pm 21.8 \pm 4.2$	$800.5 \pm 31.0 \pm 2.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	Signal-process background	$36.2 \pm 1.6 \pm 0.3$	$45.4 \pm 2.1 \pm 0.4$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ cross-feed	$4.1 \pm 0.1 \pm 0.0$	$4.7 \pm 0.1 \pm 0.0$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$ cross-feed	$8.6 \pm 0.7 \pm 1.0$	$12.9 \pm 1.0 \pm 0.9$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	Combinatorial background	$46.9 \pm 3.4 \pm 1.1$	$95.4 \pm 4.8 \pm 1.3$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	Signal	$349.0 \pm 20.0 \pm 3.5$	$393.0 \pm 21.9 \pm 1.5$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	Signal-process background	$26.3 \pm 1.7 \pm 0.3$	$28.5 \pm 2.1 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ cross-feed	$3.3 \pm 0.1 \pm 0.0$	$3.6 \pm 0.1 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$ cross-feed	$5.0 \pm 0.5 \pm 0.9$	$7.0 \pm 0.6 \pm 0.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	Combinatorial background	$38.2 \pm 3.9 \pm 3.5$	$67.0 \pm 4.5 \pm 1.7$

Signal and background yields in the signal region

B channel	Experiment	Component	$\ell^+\ell^-$	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	Signal	$326.5 \pm 17.9 \pm 8.0$	$572.8 \pm 31.4 \pm 28.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	Signal-process background	$41.4 \pm 3.2 \pm 1.0$	$64.7 \pm 4.8 \pm 5.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ cross-feed	$37.5 \pm 0.6 \pm 0.1$	$39.5 \pm 0.6 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ cross-feed	$4.3 \pm 0.5 \pm 0.5$	$5.8 \pm 0.6 \pm 0.4$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	Combinatorial background	$107.4 \pm 11.5 \pm 5.2$	$218.1 \pm 8.1 \pm 20.7$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	Signal	$302.0 \pm 34.5 \pm 1.2$	$420.6 \pm 23.1 \pm 6.7$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	Signal-process background	$44.3 \pm 4.0 \pm 1.1$	$54.7 \pm 5.2 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ cross-feed	$28.4 \pm 0.7 \pm 0.3$	$31.3 \pm 0.7 \pm 0.6$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ cross-feed	$1.6 \pm 0.2 \pm 0.3$	$2.3 \pm 0.3 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	Combinatorial background	$107.5 \pm 6.0 \pm 0.6$	$145.7 \pm 6.9 \pm 4.6$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	Signal	$73.8 \pm 7.9 \pm 8.7$	$130.5 \pm 11.1 \pm 8.8$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	Signal-process background	$8.8 \pm 1.3 \pm 1.0$	$11.4 \pm 1.7 \pm 1.7$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$ cross-feed	$11.8 \pm 0.3 \pm 0.1$	$11.4 \pm 0.3 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ cross-feed	$1.2 \pm 0.1 \pm 0.0$	$1.3 \pm 0.1 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	Combinatorial background	$16.0 \pm 1.5 \pm 5.0$	$34.5 \pm 2.0 \pm 5.3$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	Signal	$67.4 \pm 7.3 \pm 11.9$	$104.7 \pm 11.8 \pm 3.6$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	Signal-process background	$14.7 \pm 2.3 \pm 1.6$	$16.0 \pm 2.7 \pm 0.3$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ cross-feed	$12.4 \pm 0.5 \pm 0.1$	$11.1 \pm 0.5 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ cross-feed	$1.5 \pm 0.1 \pm 0.0$	$1.6 \pm 0.1 \pm 0.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	Combinatorial background	$21.8 \pm 1.8 \pm 6.5$	$44.5 \pm 2.4 \pm 1.1$

B channel	Experiment	Component	$\ell^+\ell^-$	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	Signal-process background	$318.0 \pm 7.3 \pm 1.0$	$477.9 \pm 11.3 \pm 0.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ cross-feed	$57.1 \pm 1.4 \pm 0.2$	$81.0 \pm 2.1 \pm 0.7$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ cross-feed	$86.6 \pm 3.2 \pm 0.7$	$133.1 \pm 4.8 \pm 0.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$ cross-feed	$111.9 \pm 4.5 \pm 2.8$	$205.8 \pm 8.2 \pm 10.0$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle	Combinatorial background	$1273.6 \pm 24.2 \pm 3.3$	$3122.0 \pm 52.7 \pm 9.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	Signal-process background	$181.7 \pm 7.9 \pm 1.4$	$214.7 \pm 8.0 \pm 3.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)K_S^0$ cross-feed	$50.2 \pm 1.9 \pm 0.6$	$63.5 \pm 2.3 \pm 1.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$ cross-feed	$40.4 \pm 2.0 \pm 0.4$	$47.9 \pm 2.4 \pm 0.2$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0K^+$ cross-feed	$65.2 \pm 3.5 \pm 0.3$	$97.6 \pm 4.5 \pm 1.6$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$	Belle II	Combinatorial background	$999.5 \pm 31.2 \pm 10.0$	$1690.2 \pm 38.2 \pm 14.8$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	Signal-process background	$140.8 \pm 6.4 \pm 1.2$	$216.3 \pm 10.3 \pm 1.9$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ cross-feed	$22.7 \pm 0.4 \pm 0.1$	$34.1 \pm 0.7 \pm 0.1$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$ cross-feed	$40.6 \pm 3.5 \pm 4.8$	$78.7 \pm 5.8 \pm 5.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle	Combinatorial background	$384.1 \pm 19.3 \pm 3.4$	$945.1 \pm 31.3 \pm 3.9$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	Signal-process background	$75.4 \pm 5.5 \pm 0.8$	$92.9 \pm 7.7 \pm 0.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^-K^+$ cross-feed	$16.8 \pm 0.5 \pm 0.2$	$21.2 \pm 0.6 \pm 0.4$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0K_S^0$ cross-feed	$21.1 \pm 2.2 \pm 3.7$	$34.8 \pm 3.0 \pm 1.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+K_S^0$	Belle II	Combinatorial background	$303.3 \pm 18.2 \pm 7.5$	$515.9 \pm 22.8 \pm 14.0$

B channel	Experiment	Component	$\ell^+\ell^-$	$J/\psi(\rightarrow \ell^+\ell^-)\pi^+\pi^-$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	Signal-process background	$78.9 \pm 5.6 \pm 1.3$	$165.8 \pm 11.5 \pm 12.7$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ cross-feed	$91.7 \pm 1.4 \pm 0.2$	$137.7 \pm 2.2 \pm 0.2$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ cross-feed	$10.6 \pm 1.3 \pm 1.2$	$20.6 \pm 2.1 \pm 1.4$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle	Combinatorial background	$349.6 \pm 29.0 \pm 6.8$	$999.2 \pm 26.5 \pm 18.8$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	Signal-process background	$95.7 \pm 7.8 \pm 1.8$	$135.5 \pm 11.2 \pm 0.6$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^- K^+$ cross-feed	$80.4 \pm 2.0 \pm 0.8$	$101.7 \pm 2.3 \pm 2.0$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$ cross-feed	$4.5 \pm 0.6 \pm 0.8$	$7.3 \pm 0.8 \pm 0.3$
$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$	Belle II	Combinatorial background	$455.5 \pm 18.4 \pm 4.9$	$680.9 \pm 22.1 \pm 0.8$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	Signal-process background	$15.9 \pm 2.4 \pm 1.9$	$29.7 \pm 4.6 \pm 4.5$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$ cross-feed	$31.3 \pm 0.9 \pm 0.2$	$48.1 \pm 1.4 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ cross-feed	$3.2 \pm 0.2 \pm 0.1$	$5.9 \pm 0.3 \pm 0.3$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle	Combinatorial background	$61.6 \pm 5.1 \pm 8.3$	$214.5 \pm 10.5 \pm 20.4$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	Signal-process background	$24.7 \pm 3.9 \pm 2.7$	$34.3 \pm 5.8 \pm 0.7$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^+ K_S^0$ cross-feed	$31.2 \pm 1.3 \pm 0.3$	$36.9 \pm 1.5 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	$B^+ \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K^+$ cross-feed	$4.4 \pm 0.3 \pm 0.0$	$6.6 \pm 0.4 \pm 0.1$
$B^0 \rightarrow \psi(2S)\pi^0 K_S^0$	Belle II	Combinatorial background	$92.2 \pm 6.6 \pm 16.8$	$239.8 \pm 11.4 \pm 12.9$