

Релятивистские эффекты в тяжелых мезонах

по мотивам работы [arXiv:hep-ph/2601.22598](https://arxiv.org/abs/hep-ph/2601.22598)

И.В. Образцов

Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН

11 марта 2026 г.

- ▶ Существующие экспериментальные данные по спектрам и радиационным переходам в тяжелых мезонах (содержат хотя бы один s или b кварк) не удается объяснить в рамках существующих подходов
- ▶ Вычисления на решетках позволяют получить ответ, но не дают понимания явлений
- ▶ Использовать пертурбативную КХД для описания спектров тяжелых мезонов нельзя, т. к. эти системы имеют “большой” размер

Пертурбативная КХД

"Бегущая" константа связи:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad \Lambda_{QCD} = 300 \text{ МэВ}.$$

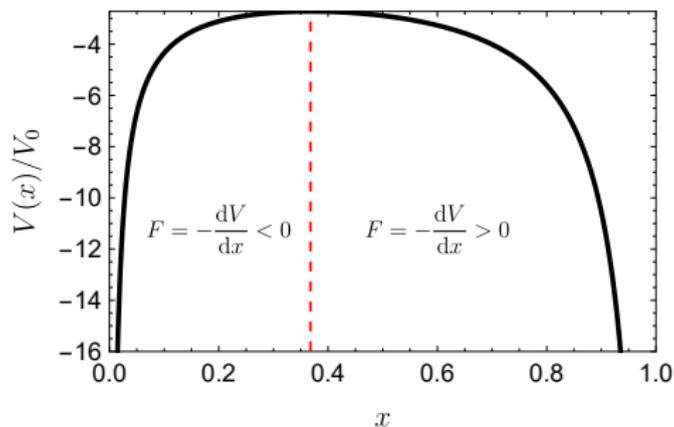
Потенциал взаимодействия:

$$V_F(q^2) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{4\pi\alpha_s(q^2)}{q^2}, \quad V(r) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\Lambda r)} \frac{1}{r},$$
$$\Lambda = e^C \Lambda_{QCD}, \quad C = 0.577, \quad \Lambda = 534 \text{ МэВ}.$$

Имеем

$$V(x) = \frac{V_0}{x \ln x}, \quad V_0 = \frac{8\pi\Lambda}{3\beta_0}, \quad x = \Lambda r.$$

Пертурбативная КХД



Инфракрасный полюс: $x^* = 1$, $r^* = 0.374$ фм.

Точка максимума: $x_{max} = 1/e$, $r_{max} = 0.138$ фм.

При $r > r_{max}$ вместо притяжения имеем отталкивание!

Пертурбативная КХД

Размер a волновой функции кваркония можно оценить, используя лептонную ширину Γ_{ee}

$$a \sim \left(\frac{4\alpha^2 e_q^2}{m_q^2 \Gamma_{ee}} \right)^{1/3},$$
$$a_{c\bar{c}} \sim 0.42 \text{ фм} \approx 3 r_{max}, \quad a_{b\bar{b}} \sim 0.18 \text{ фм} \gtrsim r_{max}.$$

Здесь e_q и m_q – заряд и масса кварка, $\alpha = 1/137$.

Для описания спектров и ширин радиационных переходов в тяжелых мезонах необходимо строить феноменологические модели

Нерелятивистские потенциальные модели

Для описания в некотором приближении спектров кваркониев $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ использовались нерелятивистские потенциальные модели с потенциалами разных видов

$$V(r) = C_0 \ln \frac{r}{r_0},$$

$$V(r) = A + B r^\alpha, \quad \alpha = 0.1,$$

$$V(r) = -\frac{a}{r} + br.$$

Используются операторы излучения, полученные в нерелятивистском приближении

$$H_{rad} = -e \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{m} - 2\mu \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

Учет релятивистских эффектов

Первый важный шаг для учета релятивистских эффектов в спектрах был сделан в работе:

S. Godfrey and N. Isgur, *Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics*, *Phys. Rev. D* **32**, 189 (1985)

$$\begin{aligned}H &= H^{(0)} + \Delta H^{(S)}, \\H^{(0)} &= h_1 + h_2 + U_g(r) + U_{conf}(r), \\h_1 &= \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2}, \quad h_2 = \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}^2}, \\U_g(r) &= -\frac{g}{r}, \quad U_{conf}(r) = br + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Потенциал $U_g(r)$ соответствует обмену 4-вектором, а потенциал $U_{conf}(r)$ - скаляром.

Учет релятивистских эффектов

Слагаемое $\Delta H^{(S)}$ есть сумма линейного $\Delta H_1^{(S)}$ и квадратичного $\Delta H_2^{(S)}$ по спинам вкладов,

$$\begin{aligned}\Delta H_1^{(S)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{g}{r^3} - \frac{b}{r} \right) \left[(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{tot}) \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{\Sigma}) \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \right] + \frac{g}{m_1 m_2 r^3} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{tot}), \\ \Delta H_2^{(S)} &= \frac{g}{m_1 m_2} \left[\frac{8\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) + \frac{1}{2r^3} \left[3(\mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{S}_{tot}^2 \right] \right].\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Недостатки модели GI: отсутствует не зависящая от спина поправка $\Delta H^{(0)}$, массы кварков в знаменателях в $\Delta H^{(S)}$, используется H_{rad} в нерелятивистском приближении.

Наводящие соображения к построению модели

A.E. Bondar and A.I. Milstein, Relativistic effects in M1 radiative decays of heavy-light mesons, Phys. Rev. D, **112**, 054037 (2025)

Разложим $\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}$ по $1/m$

$$\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} = m + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{((\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2)^2}{8m^3} + \dots$$

линейные по \mathbf{A} члены будут во всех слагаемых.

Разложим $\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}$ по $1/\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ до линейных по \mathbf{A} членов

$$\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}},$$

имеем всего одно слагаемое!

Вспомним формулу из классической электродинамики

$$dI_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{(2\pi)^2 c^3} \left| \int dt [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t)] \exp \left[i\omega \left(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c \right) \right] \right|^2 d\Omega_n d\omega.$$

Релятивистская потенциальная модель

В нашей модели гамильтониан, описывающий спектр, имеет вид $H = H^{(0)} + \Delta H^{(0)} + \Delta H^{(S)}$, где $H^{(0)}$ совпадает с **GI**.

Для $\Delta H^{(0)} = \Delta H_g^{(0)} + \Delta H_b^{(0)}$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta H_g^{(0)} &= -\frac{g}{4} \left[\frac{p^i}{h_2} \left(\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^3} \right) \frac{p^j}{h_1} + \frac{p^i}{h_1} \left(\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^3} \right) \frac{p^j}{h_2} \right] \\ &+ \frac{\pi g}{2} \left[\frac{1}{h_1} \delta(\mathbf{r}) \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \delta(\mathbf{r}) \frac{1}{h_2} \right], \\ \Delta H_b^{(0)} &= \frac{b}{2} \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{2r} - p^i r p^i \right) \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \left(\frac{1}{2r} - p^i r p^i \right) \frac{1}{h_2} \right].\end{aligned}$$

Если заменить $h_{1,2} \rightarrow m_{1,2}$, то получим гамильтониан Брейта.

Релятивистская потенциальная модель

Для спиновой части гамильтониана $\Delta H^{(S)}$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta H^{(S)} &= \frac{1}{2h_1} \left(\frac{g}{r^3} - \frac{b}{r} \right) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_1) \frac{1}{h_1} + \frac{1}{2h_2} \left(\frac{g}{r^3} - \frac{b}{r} \right) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_2) \frac{1}{h_2} \\ &+ \frac{g}{2h_1} \frac{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{tot})}{r^3} \frac{1}{h_2} + \frac{g}{2h_2} \frac{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{tot})}{r^3} \frac{1}{h_1} + \frac{g}{2} \left[\frac{1}{h_1} \mathcal{P} \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_2} \mathcal{P} \frac{1}{h_1} \right], \\ \mathcal{P} &= \frac{8\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) + \frac{1}{2r^3} \left[3(\mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{S}_{tot}^2 \right].\end{aligned}$$

Рассмотрены низшие радиальные состояния с $L = 0, J = 0$;
 $L = 0, J = 1$; $L = 1, J = 2$; $L = 1, J = 0$ и два состояния с
 $L = 1, J = 1$.

Релятивистская потенциальная модель

Два состояния, Ψ_1 и Ψ'_1 , с $L = 1, J = 1$ являются суперпозицией состояния ψ_1 с $S_{tot} = 0$ и ψ_2 с $S_{tot} = 1$:

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2(\mathbf{r}), \quad \Psi'_1 = c_2\psi_1(\mathbf{r}) - c_1\psi_2(\mathbf{r}).$$

Коэффициенты $c_{1,2}$ находятся из решения секулярного уравнения.

Важная характеристика системы: $\varphi = \arctan(c_1/c_2)$.

Релятивистская потенциальная модель

В пределе $m_2 \rightarrow \infty$, гамильтониан $\Delta H^{(S)}$ имеет вид

$$\Delta H^{(S)} = \frac{1}{2h_1} \left(\frac{g}{r^3} - \frac{b}{r} \right) \frac{1}{h_1} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_1),$$

$$c_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, c_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \varphi^* = -\arctan(1/\sqrt{2}) = -35.3^\circ, \sigma = 1,$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, c_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \varphi^* = \arctan(\sqrt{2}) = 54.7^\circ, \sigma = -1,$$

$$\sigma = \text{sgn} \left\langle \psi_1 \left| \frac{1}{2h_1} \left(\frac{g}{r^3} - \frac{b}{r} \right) \frac{1}{h_1} \right| \psi_1 \right\rangle.$$

Релятивистская потенциальная модель

В пределе $m_2 \rightarrow \infty$ удобно ввести оператор $\mathbf{j}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1$. Тогда вероятности $W_{1/2}$ и $W_{3/2}$ найти $j_1 = 1/2$ и $j_1 = 3/2$ в состоянии, соответствующем волновой функции Ψ'_1 , равны

$$W_{1/2} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}c_1 + c_2)^2 = \delta_{\sigma,-1}, \quad W_{3/2} = 1 - W_{1/2} = \delta_{\sigma,1}.$$

Мы получили:

$W_{1/2} = 0.05$ для $b\bar{u}$, $b\bar{d}$, $b\bar{s}$, $b\bar{c}$

$W_{1/2} = 0.5$ для $c\bar{u}$, $c\bar{d}$ и $W_{1/2} = 0.23$ для $c\bar{s}$

Вывод: b кварк можно считать достаточно тяжелым, а c кварк нельзя

Радиационные переходы в релятивистской потенциальной модели

Однофотонные переходы описываются гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H_{rad} &= G^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{G}^{(S)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{G}^{(\Sigma)}, \\
 G^{(0)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h_1}, e_1 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{p} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h_2}, e_2 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{p} \right\} \\
 &+ \frac{g}{4} \left[\frac{p^j}{h_2} \left(\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^3} \right) e_1 A_1^i \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1} e_1 A_1^i \left(\frac{\delta^{ij}}{r} + \frac{r^i r^j}{r^3} \right) \frac{p^j}{h_2} \right. \\
 &\left. - (h_1 \leftrightarrow h_2, e_1 \rightarrow e_2, A_1 \rightarrow A_2) \right] \\
 &+ \frac{b}{2} \left[\frac{1}{h_1} \{r, e_1 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{p}\} \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \{r, e_2 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{p}\} \frac{1}{h_2} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь $\{A, B\} = AB + BA$, \mathbf{A}_W^* - вектор поляризации фотона, $\mathbf{A}_W^* \cdot \mathbf{k} = 0$,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_W^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r}, \quad M = m_1 + m_2.$$

Сравнение с экспериментом

Параметры модели: $m_b, m_c, m_s, m_u, m_d, b, g, C_0, C_1$

Эти параметры были найдены из анализа спектров масс:

- ▶ Рассмотрели системы $b\bar{b}, c\bar{c}$. Нашли m_b, m_c, b .
- ▶ Рассмотрели системы $b\bar{u}, b\bar{d}$. Нашли m_u, m_d , пренебрегая нарушением изотопики.
- ▶ Рассмотрели систему $b\bar{s}$. Нашли m_s .

В каждой системе свои g, C_0, C_1 , так как размеры волновых функций разные. Массы кварков и параметр b во всех системах одинаковые.

Все остальное (оставшиеся массы и ширины радиационных переходов) предсказывается!

Сравнение с экспериментом

В итоге мы получили следующие значения параметров

Параметр $b = 0.1 \text{ ГэВ}^2$

Массы кварков (в ГэВ):

$m_b = 5, m_c = 1.6, m_s = 0.55, m_u = m_d = 0.25$

Параметр g и приведенная масса μ (в ГэВ)

	$b\bar{b}$	$b\bar{c}$	$c\bar{c}$	$b\bar{s}$	$c\bar{s}$	$b\bar{u}$	$c\bar{u}$
g	0.57	0.75	0.78	0.82	0.93	0.94	0.95
μ	2.5	1.21	0.8	0.5	0.41	0.24	0.22

Сравнение с экспериментом

Спектр масс в системах $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$ (в МэВ)

	$M(\eta_c)$	$M(J/\psi)$	$M(\chi_{c0})$	$M(\chi_{c1})$	$M(h_c)$	$M(\chi_{c2})$
Предсказания	2984	3093	3466	3513	3525	3544
Эксперимент	2984	3097	3415	3511	3525	3556
	$M(\eta_b)$	$M(\Upsilon)$	$M(\chi_{b0})$	$M(\chi_{b1})$	$M(h_b)$	$M(\chi_{b2})$
Предсказания	9399	9459	9876	9894	9899	9907
Эксперимент	9399	9460	9859	9893	9899	9912

Спектр масс в системах $b\bar{u}$ и $b\bar{d}$ (в МэВ)

	$M(B^{(-)})$	$M(B^{(-)*})$	$M(B_0^{(-)})$	$M(B_1^{(-)})$	$M(B_1^{(-)'})$	$M(B_2^{(-)})$
Предсказания	5280	5382	5677	5711	5726	5740
Эксперимент	5279	5325	5726	5737
	$M(B^{(0)})$	$M(B^{(0)*})$	$M(B_0^{(0)})$	$M(B_1^{(0)})$	$M(B_1^{(0)'})$	$M(B_2^{(0)})$
Предсказания	5280	5382	5677	5711	5726	5740
Эксперимент	5280	5325	5726	5740

Сравнение с экспериментом

Спектр масс в системе $b\bar{s}$ (в МэВ)

	$M(B_s)$	$M(B_s^*)$	$M(B_{s0})$	$M(B_{s1})$	$M(B'_{s1})$	$M(B_{s2})$
Предсказания	5367	5443	5786	5815	5828	5840
Эксперимент	5367	5415	5829	5840

Спектр масс в системах $c\bar{u}$ и $c\bar{d}$ (в МэВ)

	$M(D^{(0)})$	$M(D^{(0)*})$	$M(D_0^{(0)})$	$M(D_1^{(0)})$	$M(D_1^{(0)'})$	$M(D_2^{(0)})$
Предсказания	1867	2020	2343	2413	2427	2452
Эксперимент	1865	2007	2343	2412	2422	2461
	$M(D^{(+)})$	$M(D^{(+)*})$	$M(D_0^{(+)})$	$M(D_1^{(+)})$	$M(D_1^{(+)'})$	$M(D_2^{(+)})$
Предсказания	1867	2020	2343	2413	2427	2452
Эксперимент	1870	2010	2343	...	2426	2464

Сравнение с экспериментом

Спектр масс в системе $c\bar{s}$ (в МэВ)

	$M(D_s)$	$M(D_s^*)$	$M(D_{s0})$	$M(D_{s1})$	$M(D'_{s1})$	$M(D_{s2})$
Предсказания	1968	2122	2455	2525	2542	2569
Эксперимент	1968	2112	2317	2460	2535	2569

Предсказания для ширин радиационных переходов $D_{sJ} \rightarrow D_s\gamma$ и $D_{sJ} \rightarrow D_s^*\gamma$ (в кэВ)

Публикация	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	Наша работа
$\Gamma(D_{s0} \rightarrow D_s^*\gamma)$	1.9	14.5-24.9	5.46	4.92	2.06-2.07	...	4.51
$\Gamma(D_{s1} \rightarrow D_s\gamma)$	6.2	10.3-17.2	13.2	12.8	3.53-3.61	...	49.66
$\Gamma(D_{s1} \rightarrow D_s^*\gamma)$	5.5	14.0-25.1	17.4	15.5	4.74-4.79	...	1.95
$\Gamma(D'_{s1} \rightarrow D_s\gamma)$	15	25.2-31.1	61.2	54.5	18.18-18.85	1.6 ± 2.3	1.51
$\Gamma(D'_{s1} \rightarrow D_s^*\gamma)$	5.6	14.6-22.8	9.21	8.9	2.96-3.02	$10.4 \pm 1.$	16.35
$\Gamma(D_{s2} \rightarrow D_s^*\gamma)$	19	41.5-55.9	49.6	44.1	15.23-15.66	9.4 ± 2.0	3.75

Заключение

- ▶ В рамках релятивистской потенциальной модели проведен детальный анализ спектров и парциальных ширин радиационных переходов в различных системах тяжелых мезонов
- ▶ Получено качественное согласие со всеми имеющимися экспериментальными данными
- ▶ Учет релятивистских эффектов позволяет объяснить экспериментальные данные, которые не получается объяснить в других моделях
- ▶ Предсказания для масс мезонов и парциальных ширин радиационных переходов остаются конечными даже при нулевой массе легкого кварка
- ▶ Результаты будут полезны при планировании экспериментов, посвященных изучению физики тяжелых мезонов