

Эффективная кварковая модель с конфайментом

Андрей Раджабов

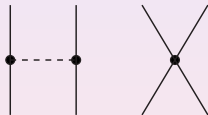
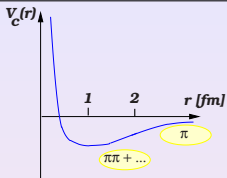


Институт Динамики Систем и Теории Управления СО РАН,
Иркутск

11 Марта 2026,
«Физика фундаментальных взаимодействий»,
ИЯФ СО РАН, г. Новосибирск

- 1 Мотивация
- 2 Нелокальная киральная кварковая модель в приближении среднего поля
- 3 Подход Грибова-Цванцигера для глюонов и кварковые полюса
- 4 Преобразование Лапласа для пропагатора
- 5 Моделирование конфайнмента в кварковом пропагаторе
- 6 Обобщение на ненулевую температуру – деконфайнмент
- 7 Мезоны в среде

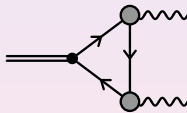
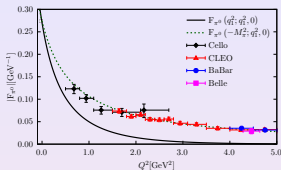
Ядерные модели



нуклоны, пион
сотни МэВ

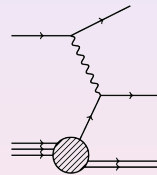
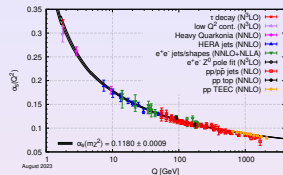
киральное разложение

Кварковые модели



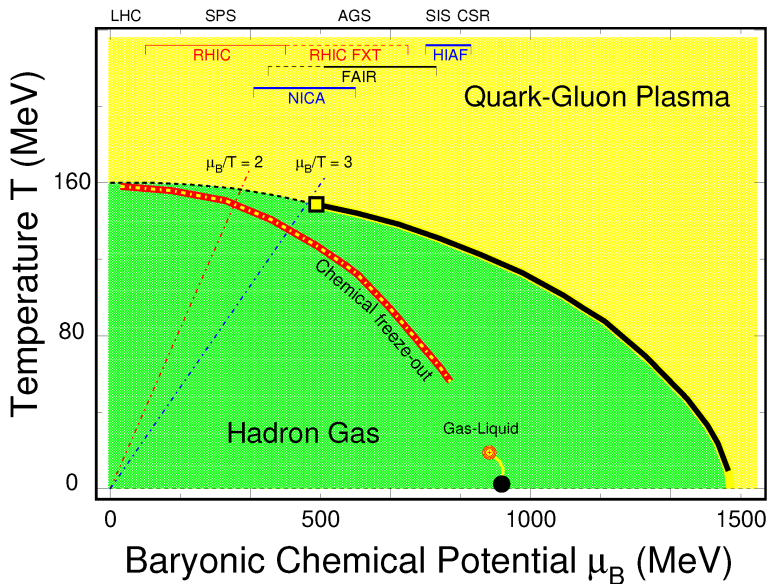
кварки, мезоны
~ 1 ГэВ
 $1/N_c$

КХД



кварки, глюоны
> 1 ГэВ
 α

[E.Epelbaum, H.Hammer, Meissner Rev.Mod.Phys 81. 7 (2009) 1773; PDG 2024]



- 1 Основана на симметриях КХД (киральная симметрия)
- 2 Адроны должны быть (кварковыми) связанными состояниями
- 3 Адронная фаза: адроны — динамические степени свободы

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle_{vac} \left\{ 1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{g_1}{F^2} + O(p^4) \right\}, \quad g_1 = \frac{T^2}{12}$$



$$\langle \bar{u}u \rangle_\rho = \langle \bar{u}u \rangle_{vac} \left\{ 1 - \frac{2\sigma}{F_\pi^2 M_\pi^2} \rho_s + \frac{4c_5}{F_\pi^2} \rho_a \right\}, \quad \rho_s = (\rho_p + \rho_n)/2$$

$$\langle \bar{d}d \rangle_\rho = \langle \bar{d}d \rangle_{vac} \left\{ 1 - \frac{2\sigma}{F_\pi^2 M_\pi^2} \rho_s - \frac{4c_5}{F_\pi^2} \rho_a \right\}, \quad \rho_a = (\rho_p - \rho_n)/2$$

- 4 Конфайнмент (хотя бы аналитически или технически)

Кварковая часть лагранжиана нелокальной модели типа Намбу–Йона-Лазинио имеет вид

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_c)q(x) + \frac{G}{2}[J_\sigma(x)J_\sigma(x) + J_\pi^a(x)J_\pi^a(x)]$$

где m_c — токовая кварковая масса, а нелокальные кварковые токи имеют вид

$$J_I(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 \delta\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) f((x_1 - x_2)^2) \bar{q}(x_1) \Gamma_I q(x_2)$$

$$\Gamma_\sigma = \mathbf{1}, \Gamma_\pi^a = i\gamma^5 \tau^a$$

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp\left(i\mathcal{S}(\bar{q}, q) + i \int d^4x [\bar{q}\eta + \bar{\eta}q]\right)$$

$$\int \mathcal{D}\Phi \exp\left(i \int d^4x (\pm J\Phi - B\Phi^2)\right) = \frac{1}{N'} \exp\left(i \int d^4x \frac{J^2}{4B}\right)$$

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{N''} \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}\tilde{\sigma} \mathcal{D}\pi \exp\left(i\mathcal{S}(q, \bar{q}, \tilde{\sigma}, \pi) + i \int d^4x [\bar{q}\eta + \bar{\eta}q]\right)$$

Кварковая часть лагранжиана нелокальной модели типа Намбу–Йона-Лазинио имеет вид

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_c)q(x) + \frac{G}{2}[J_\sigma(x)J_\sigma(x) + J_\pi^a(x)J_\pi^a(x)]$$

где m_c — токовая кварковая масса, а нелокальные кварковые токи имеют вид

$$J_I(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 \delta\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) f((x_1 - x_2)^2) \bar{q}(x_1) \Gamma_I q(x_2)$$

$$\Gamma_\sigma = \mathbf{1}, \Gamma_\pi^a = i\gamma^5 \tau^a$$

После линейризации четырехфермионных вершин путем введения вспомогательных скалярных ($\tilde{\sigma}$) и псевдоскалярных (π^a) мезонных полей кварковый сектор описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{q\pi\sigma} = \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_c)q(x) - \frac{\pi_a^2 + \tilde{\sigma}^2}{2G} + J_\sigma(x)\tilde{\sigma}(x) + \pi^a(x)J_\pi^a(x).$$

Скалярное поле $\tilde{\sigma}$ имеет ненулевое вакуумное среднее: $\langle 0|\tilde{\sigma}|0\rangle = \sigma_0 \neq 0$. Чтобы получить скалярное поле с нулевым вакуумным средним, необходимо переопределить поле: $\tilde{\sigma} = \sigma + \sigma_0$.

Кварковая модель в приближении среднего поля. Уравнение щели.

Варьируя действие по σ (исключая линейные члены в лагранжиане), можно получить уравнение щели для кварковой массы

$$\left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right\rangle_0 = 0$$

В результате киральная симметрия спонтанно нарушается, и кварк приобретает динамическую массу $m(p^2) = m_c + m_d f(p^2)$, где $m_d = -\sigma_0$. Сепарабельная структура взаимодействия приводит к решению, в котором зависимость от импульса факторизуется, уравнение "щели" принимает простой вид

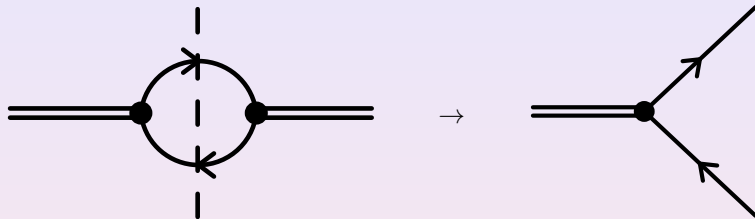
$$\frac{m_d}{G} - 8N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k^2)m(k^2)}{k^2 + m^2(k^2)} = 0.$$

Уравнение для скалярного коэффициента m_d легко решается численно. Кварковый пропагатор имеет вид

$$S(p) = (\hat{p} - m(p))^{-1}.$$

Мезонные пропагаторы можно получить, рассматривая квадратичные члены по мезонным полям из лагранжиана на однопетлевом уровне, или с помощью уравнения Бете–Солпитера. Мезонные массы находятся в точках $p^2 = -M_M^2$, которые соответствуют решению уравнения (compositeness)

$$-G^{-1} + \Pi_{MM}(-M_M^2) = 0.$$



$$\frac{1}{p^2 - (m^2 \pm i\epsilon)} \equiv \mathcal{P} \frac{1}{p^2 - m^2} \pm i\pi\delta(p^2 - m^2)$$

В случае конституэнтных кварков с постоянной массой поляризационный оператор мезона приобретает мнимую часть \rightarrow мезон с массой $M > 2m$ может распадаться на пару кварков с постоянной массой m .

Как показано Грибовым, квантование Фаддеева-Попова допускает множество калибровочных конфигураций, соответствующих одному и тому же физическому состоянию¹. Ограничивая функциональный интеграл областью, где детерминант Фаддеева-Попова положительный, глюонный пропагатор приобретает непертурбативную модификацию в инфракрасной области, что приводит к появлению дополнительного характеристического масштаба

$$\gamma^4 \sim \left\langle \alpha_s (F_{\mu\nu}^a)^2 \right\rangle$$

Локальное перенормируемое действие в теории Грибова-Цванцигера ведёт к глюонному пропагатору, имеющему комплексные особенности и обращающемуся в нуль в пределе нулевого импульса². Поперечная компонента глюонного пропагатора принимает вид³

$$\frac{k^2}{(k^2)^2 + \gamma^4} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 + i\gamma^2} + \frac{1}{k^2 - i\gamma^2} \right)$$

Структура с двумя комплексными полюсами не соответствует физическим возбуждениям в спектре частиц – конфайнмент глюонов внутри горизонта Грибова.

¹V. N. Gribov, Nucl.Phys.B 139(198)1

²D. Zwanziger, Nucl.Phys.B323(1989)513, Nucl.Phys.B399(1993)477

³It is unfortunate, therefore, that the form of Equation, which Gribov suggested and discussed for illustrative purposes only, is often referred to in the literature as the "Gribov propagator." – Y.L.Dokshitzer, D.E.Kharzeev, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 54(2004)487.

Ключевая теоретическая идея, вытекающая из подхода (refined) Грибова-Цванцигера: появление пары комплексно-сопряженных полюсов в **глюонном** пропагаторе служит прямым указанием на конфайнмент. В нелокальной модели знаменатель кваркового пропагатора имеет вид

$$\frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} = \frac{1}{k^2 + (m_c + m_d f(k^2))^2},$$

где $f(k)$ выбирается произвольно, например, $f(k^2) = \exp(-k^2/\Lambda^2)$. В результате кварковый пропагатор может иметь полюса на вещественной оси или на комплексной плоскости, когда

$$m^2(k^2) + k^2 = 0$$

выполняется для некоторого $k^2 = -m_{\text{pole}}^2$. Если полюс является вещественным, он соответствует полюсной массе m_{pole} , и при $k^2 > 4m_{\text{pole}}^2$ в поляризационном операторе мезона появляется мнимая часть. Для комплексных полюсов ситуация несколько сложнее.

Поляризационный оператор пиона (в евклидовом пространстве) имеет вид

$$\Pi_\pi(p^2) = 8N_c \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} g^2(q^2) \frac{(k_- \cdot k_+) + m(k_+^2)m(k_-^2)}{(k_+^2 + m^2(k_+^2))(k_-^2 + m^2(k_-^2))}$$

$p = k_+ - k_-$ и $q = (k_+ + k_-)/2$. В общем случае протекание импульса в диаграмме произвольно, причем $k_+ = k + \zeta p$ и $k_- = k - (1 - \zeta)p$, где $0 < \zeta < 1$. Результат не должен зависеть от этого выбора.

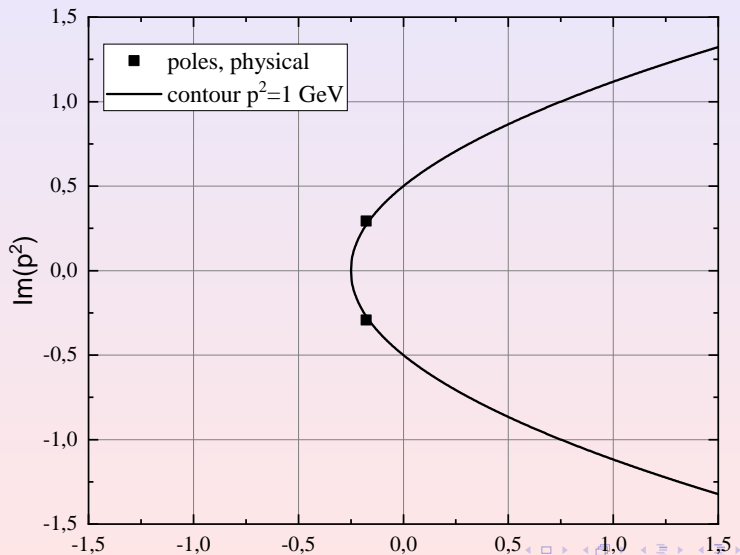
Массу пиона M_π можно найти из уравнения

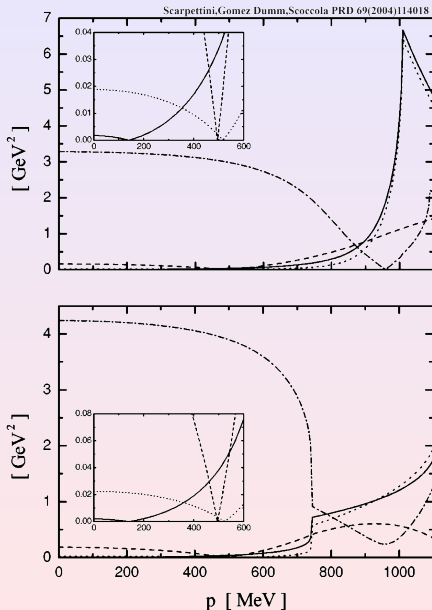
$$-G^{-1} + \Pi_\pi(-M_\pi^2) = 0$$

Для этого необходим аналитический переход в пространство Минковского, т.е. к $p^2 = -M^2 < 0$. Положим $\zeta = 1/2$, тогда $k_\pm = k \pm p/2$ и

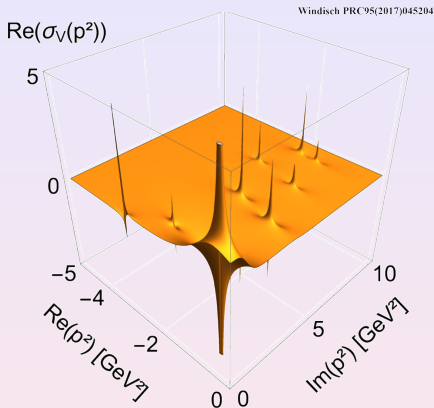
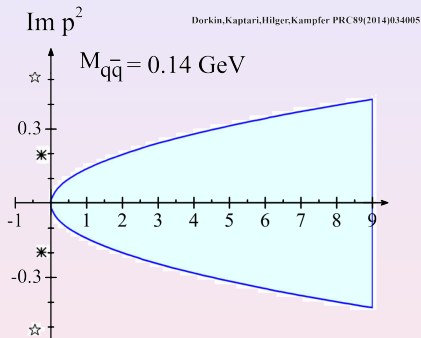
$$k_\pm^2 = k^2 \pm (k \cdot p) + \frac{p^2}{4} = k^2 \pm i\sqrt{k^2}M \cos(\theta) - \frac{M^2}{4}$$

Кварковые импульсы становятся комплексными (представляют собой параболу для фиксированного M).





После аналитического продолжения (Cutkosky, Landshoff, Olive, Polkinghorne, Nucl.Phys. B12(1969)281) мнимые части различных полюсов сокращают друг друга, однако вещественная часть поляризационного оператора имеет излом, который должен быть нефизическим. Это происходит при $M_{\text{thr}}^2 = 2\text{Re}(m_{\text{pole}}^2) + 2\sqrt{\text{Re}(m_{\text{pole}}^2)^2 + \text{Im}(m_{\text{pole}}^2)^2}$. Это ограничивает область применимости модели.



Параметризация с использованием комплексно сопряженных полюсов (N. Souchlas, JPhys G37(2010)115001)

$$S(p) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{R_{z_i}}{i\not{k} + m_i} + \frac{R_{z_i}^*}{i\not{k} + m_i^*} \right)$$

Предложения по устранению порогов рождения кварков

- 1 Кварковый пропагатор как целая функция - Модель конфайнмента кварков в адронах (Ефимов, Иванов 1993)
- 2 Модель НИЛ с ИК обрезанием (Blaschke, Buraу, Volkov, Yudichev EPJA(2001)11, 319)

$$I_2^{(\lambda_{M_\sigma}, \Lambda)}(M_\sigma, m) = \frac{N_c}{2\pi^2} \int_{\lambda_{M_\sigma}}^{\Lambda} dk \frac{k^2}{E_k(4E_k^2 - M_\sigma^2)}$$

- 3 В уравнениях Дайсона-Швингера (Burden, Roberts, Thomson PLB 371(1996)163) скалярная и векторная части кваркового пропагатора $S(p) = -i\hat{p}\sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2)$ (в евклидовом пространстве)

$$\sigma_S(p^2) = \frac{1}{\lambda} (2\bar{m} \mathcal{F}(2(x + \bar{m}^2)) + \mathcal{F}(b_1 x) \mathcal{F}(b_3 x) [b_0 + b_2 \mathcal{F}(\epsilon x)]),$$
$$\sigma_V(p^2) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1 - \mathcal{F}(2(x + \bar{m}^2))}{x + \bar{m}^2}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

- 4 Скалярная (или векторная) часть кваркового пропагатора как целая функция (А.Е. Раджабов, Волков EPJA19(2004)139)

$$\frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} = \frac{1 - \exp(-(k^2 + m_c^2)/\Lambda^2)}{k^2 + m_c^2}$$

- 5 Обрезание в α -пространстве (Branz, Faessler, Gutsche, Ivanov, Korner, Lyubovitskij PRD81(2010)034010)

$$\Pi^c = \int_0^{1/\Lambda^2} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n).$$

Преобразование Лапласа

В локальной модели обычное преобразование к α -представлению (пространство Минковского)

$$\frac{1}{m^2 - l^2 - i\epsilon} = i \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(l^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

Преобразуя каждый пропагатор таким образом и затем интегрируя по d^4k , получаем выражение по α_i , где вся зависимость содержится в экспоненциальном множителе

$$\Pi(p^2) \sim \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{ip^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} F(\alpha_1, \alpha_2) P_m(p^2)$$

В нелокальной модели можно использовать преобразование Лапласа (евклидово пространство)

$$\frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha k^2} \text{InvD}(\alpha),$$

Сходимость такого представления ?

$$\text{InvD}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} = \frac{1}{k^2 + (m_c + m_d f(k^2))^2}$$

Разложение по $m_d \rightarrow$ область малых α (или больших импульсов)

$$\text{InvD}(k^2) \approx \frac{1}{k^2 + m_c^2} + \dots$$

$$\text{InvD}(\alpha) \approx e^{-\alpha m_c^2} + \dots$$

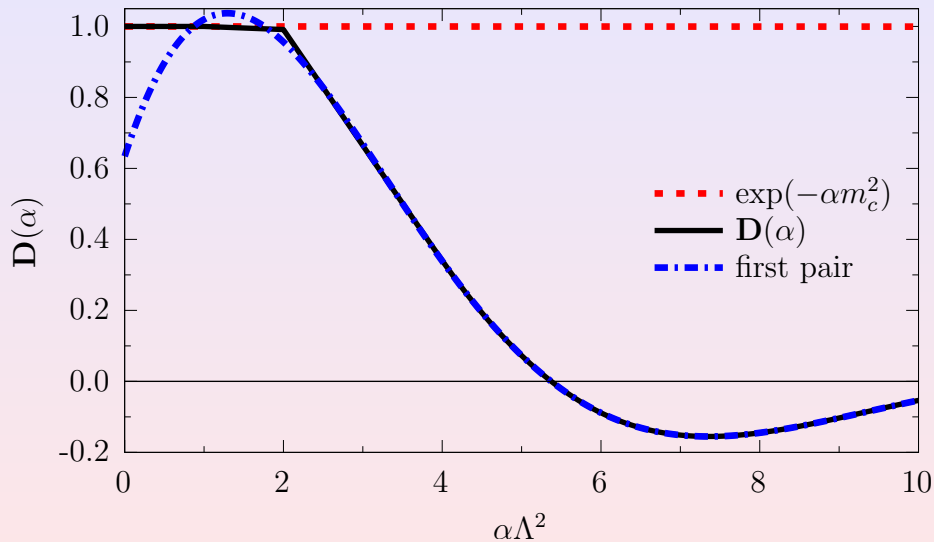
Кварковый пропагатор может быть представлена как сумма его полюсов

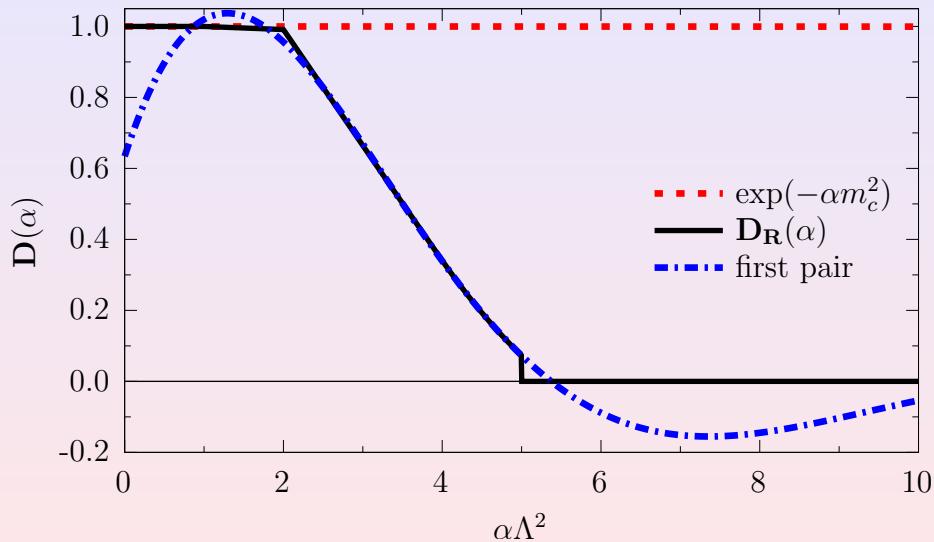
$$\text{InvD}(k^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{z_i}}{k^2 + z_i}$$

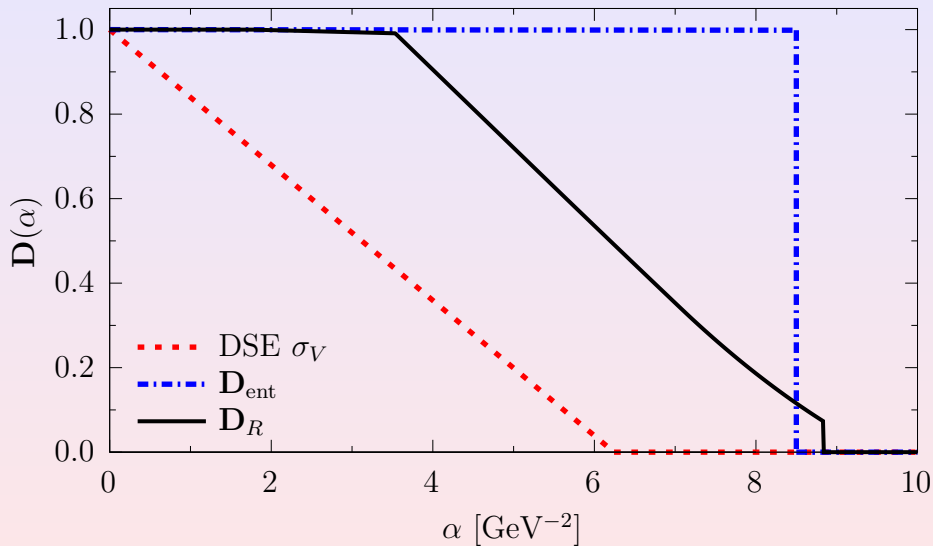
$$\text{InvD}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} R_{z_i} e^{-\alpha z_i}$$

Для сходимости необходимо $\text{Re}(k^2 + z_i) > 0$

$$\int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha(k^2 + z_i)}$$







Массовую функцию⁴ можно найти из определения

$$\frac{1}{k^2 + m_R^2(k^2)} = \text{InvD}_R(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{z_i} \exp(-(k^2 + z_i)/\Lambda_c^2)}{k^2 + z_i}.$$

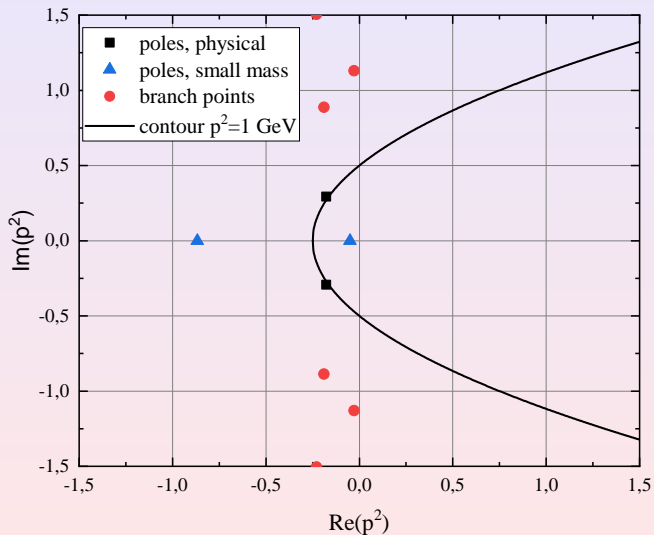
Тогда $m_R(k^2) = \sqrt{\text{InvD}_R^{-1}(k^2) - k^2}$.

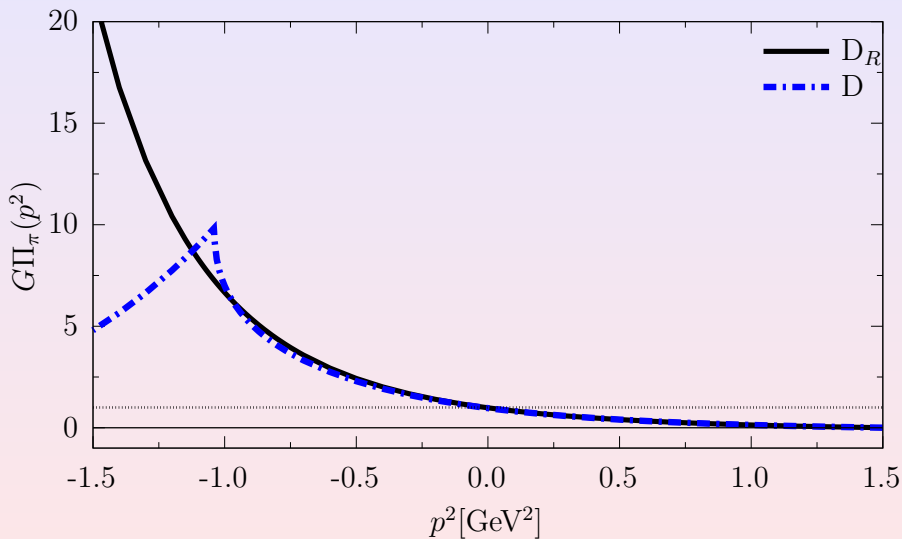
Функции, которые появляются в кварковых петлях, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + m_R^2(k^2)} &= \text{InvD}_R(k^2) \\ \frac{m_R^2(k^2)}{k^2 + m_R^2(k^2)} &= \text{InvD}_R(k^2)(\text{InvD}_R^{-1} - k^2) = 1 - k^2 \text{InvD}_R(k^2) \\ \frac{m_R(k^2)}{k^2 + m_R^2(k^2)} &= \sqrt{\text{InvD}_R(k^2)(1 - k^2 \text{InvD}_R(k^2))} \end{aligned}$$

Полюса отсутствуют: имеются только разрезы на комплексной плоскости.

⁴AER, X. Shang EPJC 85 (2025) 860





Модель с переходом конфайнмент-деконфайнмент

$$\frac{1}{k^2 + m_R^2(k^2)} = \text{InvD}_R(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_{z_i} \exp(-(k^2 + z_i)/\Lambda_c^2)}{k^2 + z_i}.$$

Модель с переходом конфайнмент-деконфайнмент

- 1 конфайнмент, сумма начинается с $i = 1$, $\text{InvD}_R(k^2)$ — целая функция
- 2 деконфайнмент, сумма начинается с $i = 2$, $\text{InvD}_R(k^2)$ имеет один полюс

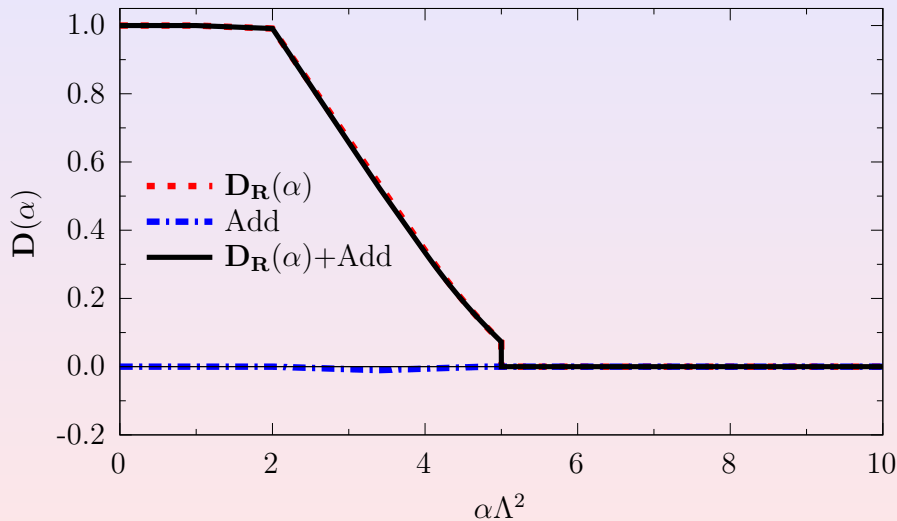
В среде для решения уравнений щели G , Λ и m_c считаются не зависящими от среды, в то время как $m_d(T, \mu)$ зависит.

$$\frac{\partial \Omega_R}{\partial m_d} = \frac{m_d}{G} - 8T \sum_{i=0, \pm} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} g(k_{n,i}^2) m_R(k_{n,i}^2) D_R(k_{n,i}^2),$$

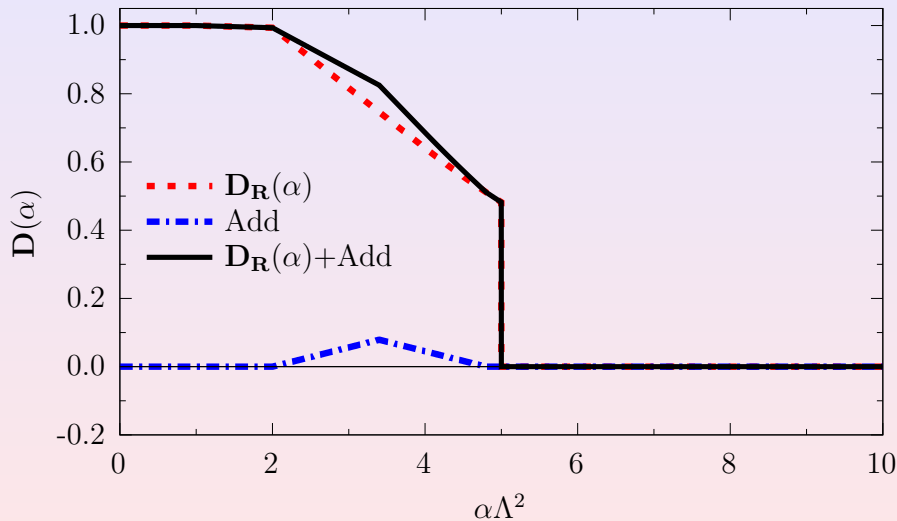
где $k_{n,i} = (\omega_n^i - i\mu)^2 + \mathbf{k}^2$, фермионные частоты Мацубары ω_n^i частично сдвинуты из-за наличия петли Полякова: $\omega_n^{\pm} = \omega_n \pm \phi_3$, $\omega_n^0 = \omega_n$ и $\omega_n = (2n + 1)\pi T$.

Возможные проблемы: уравнение щели негладкое, масса пиона, экспоненциальный рост в времениподобной области

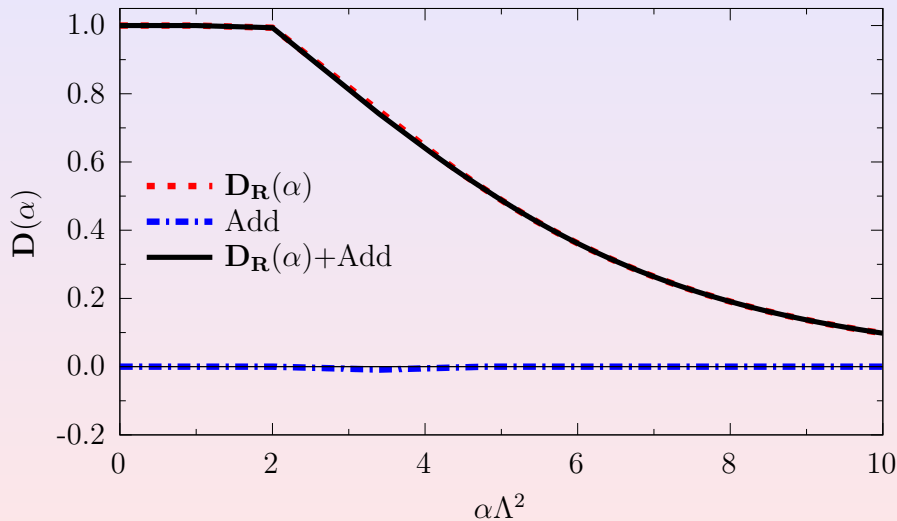
(предварительно) Изменение формы α -функции



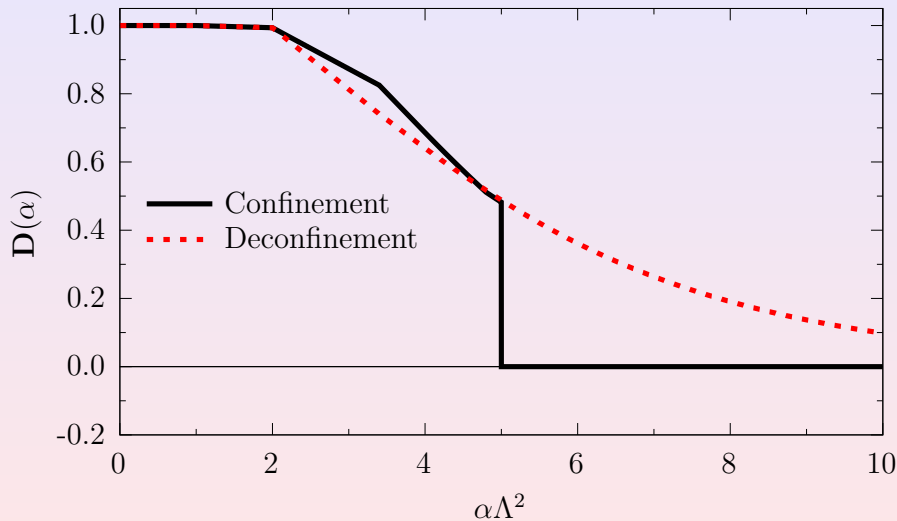
(предварительно) Изменение формы α -функции



(предварительно) Изменение формы α -функции



(предварительно) Изменение формы α -функции



При конечной температуре лоренц-инвариантность нарушается из-за появления коллективного вектора движения среды u . Необходимо рассматривать зависимость корреляционных функций от направлений, параллельных и перпендикулярных такому вектору. Удобно выбрать этот вектор как $u = (1, \vec{0})$ и рассматривать нулевую компоненту и трехмерный импульс отдельно. Можно выделить два типа корреляций:

- временные ($\Omega^2 = -M^2, \vec{p}^2 = 0$)
- пространственные ($\Omega^2 = 0, \vec{p}^2 = -M^2$)

Поляризационный оператор пиона

$$\Pi_\pi((\Omega - i\mu_{lm})^2, \vec{p}^2) = 8T \sum_{j=0, \pm} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g^2(q^2) \frac{(k_- \cdot k_+) + m(k_+^2)m(k_-^2)}{(k_+^2 + m^2(k_+^2))(k_-^2 + m^2(k_-^2))}$$

где

$$k_- = ((2n + 1)\pi T + j\phi_3 - i\mu_m, \vec{k} - (1 - \zeta)\vec{p})$$

$$k_+ = ((2n + 1)\pi T + j\phi_3 + \Omega - i\mu_l, \vec{k} + \zeta\vec{p}).$$

При конечных химических потенциалах кварков μ_l ($l = u, d$) кварковые импульсы становятся комплексными даже для евклидовых внешних импульсов.

Для поляризационного оператора мезона можно выделить два предельных случая:

- Мезон имеет только нулевую компоненту импульса (или четвертую компоненту в евклидовой формулировке). Это соответствует аналитическому продолжению от вещественных частот Мацубары к комплексным значениям $\nu_M = iM_\pi^{\text{pol}}$:

$$-G^{-1} + \Pi_\pi(-(M_\pi^{\text{pol}})^2, 0) = 0.$$

Полюсная, временная или динамическая масса мезона.

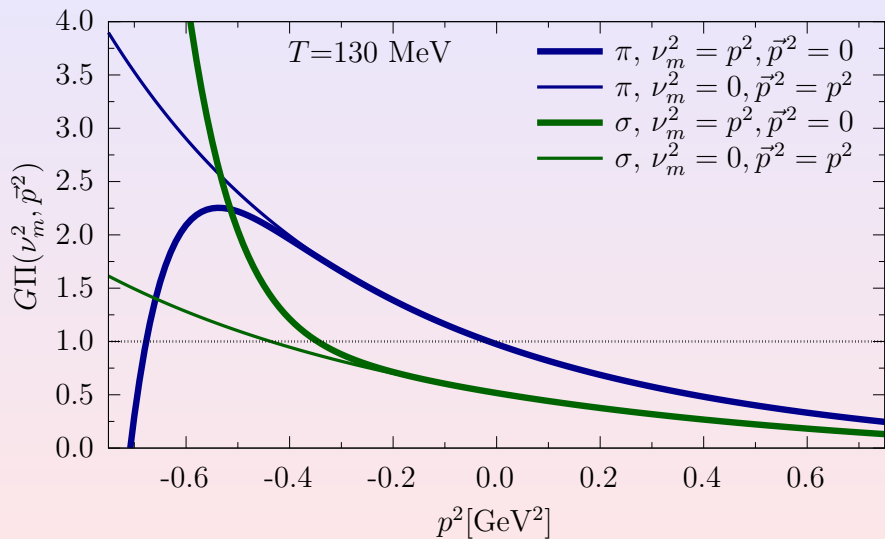
- Экранирующая масса связана с нулевой энергетической компонентой (нулевой модой Мацубары), поляризационный оператор аналитически продолжается к отрицательному значению квадрата трехмерного импульса $\vec{p}^2 = -(M_\pi^{\text{scr}})^2$:

$$-G^{-1} + \Pi_\pi(0, -(M_\pi^{\text{scr}})^2) = 0.$$

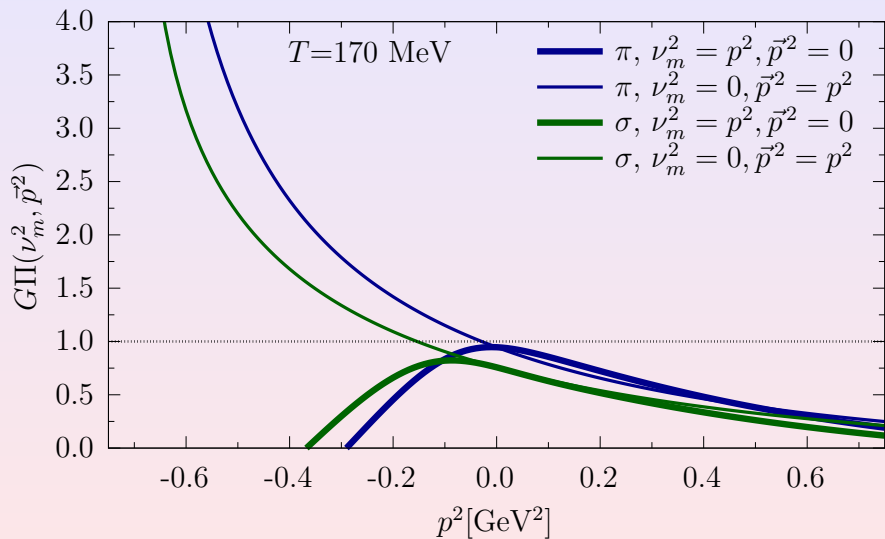
Это определение связано с асимптотическим поведением корреляционной функции и в координатном пространстве соответствует экранированию потенциала при обмене мезоном, $\exp(-M_\pi^{\text{scr}} r)$.

В пределе нулевой температуры массы должны совпадать: $M_\pi^{\text{pol}} = M_\pi^{\text{scr}}$. В решеточных вычислениях обычно рассчитываются только экранирующие массы. Полюсные массы чувствительны к размеру решетки N_t , и по-видимому не могут быть надежно оценены.

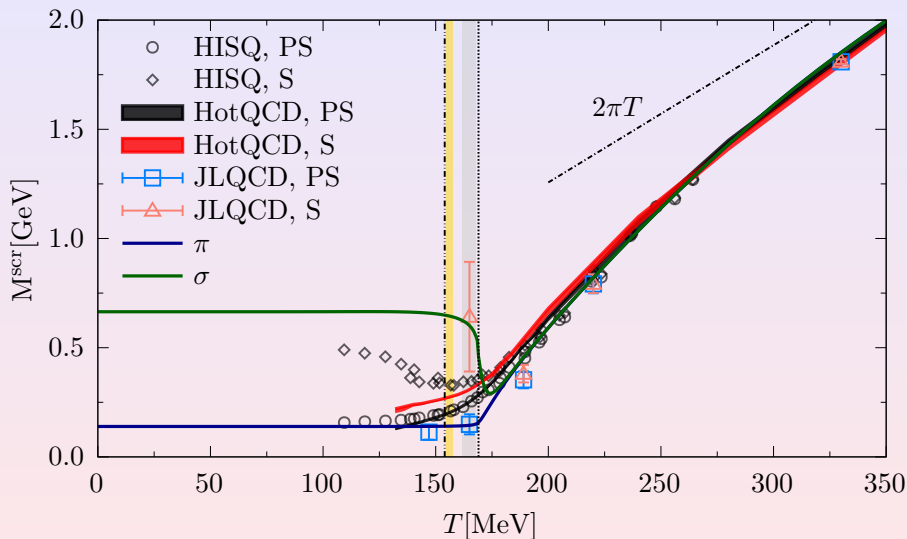
Поляризонный оператор пиона при ненулевой T

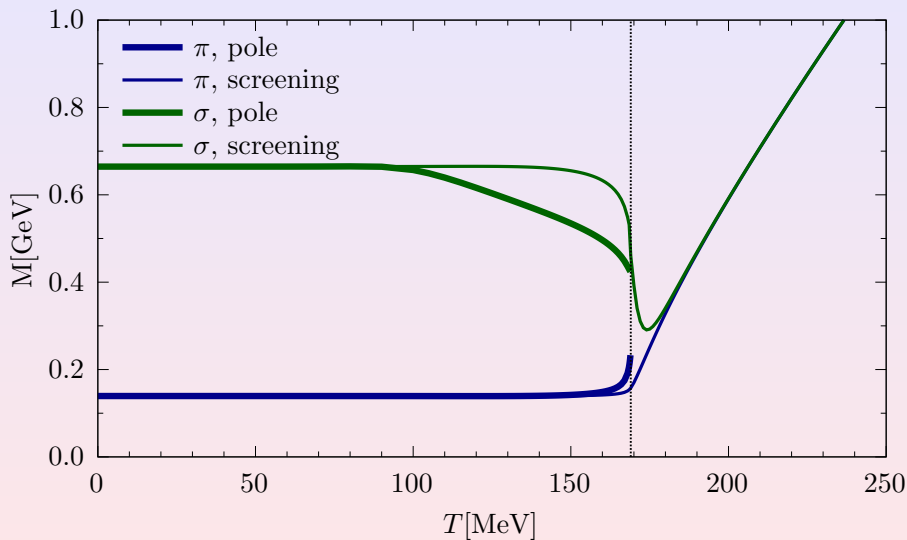


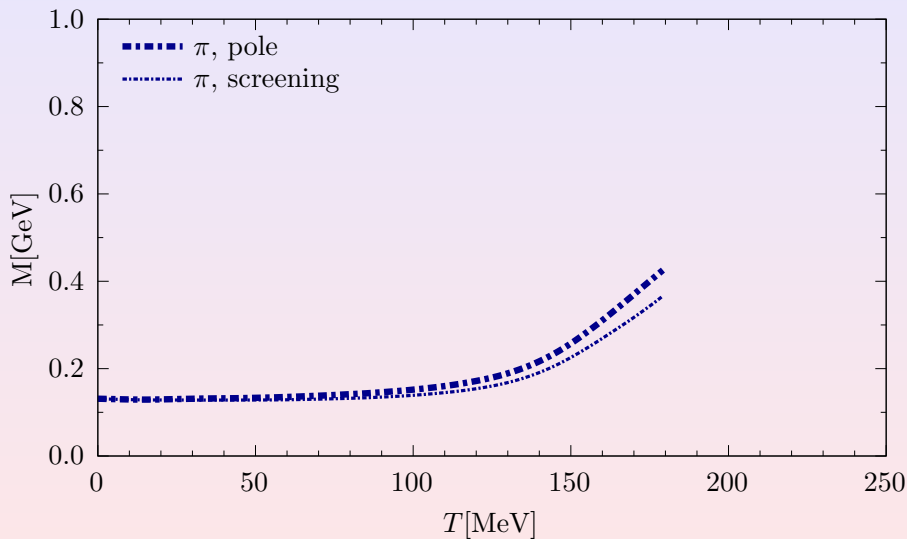
Поляризонный оператор пиона при ненулевой T

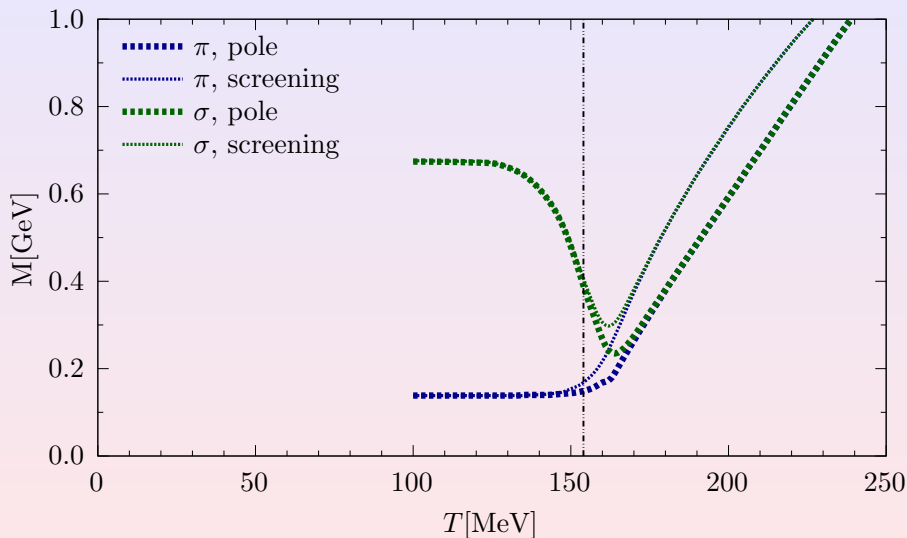


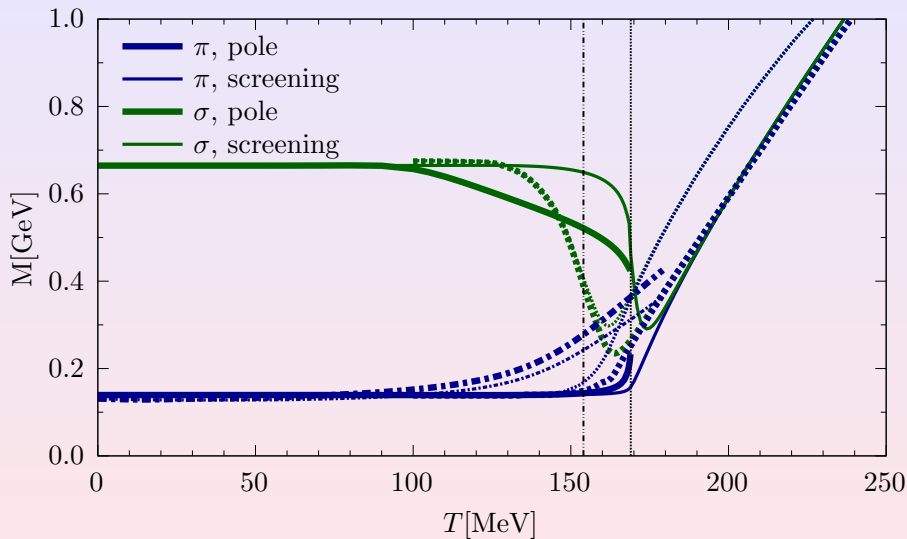
Экранирующая масса мезона – сравнение с решеткой











- 1 Рассмотрена кварковая модель с нелокальными кварковыми токами
- 2 Мезоны — кварк-антикварковые связанные состояния
- 3 Аналитический конфайнмент:
 - обрезание в пространстве Лапласа — отсутствие мнимой части в кварковых петлях в адронной фазе
 - фазовый переход деконфайнмента
 - синхронизация фаз – (малая) модификация α -образа
 - оценены экранирующие и полюсные массы мезонов при ненулевой T

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!