

# PDF при малых $x$ в непertурбативной области



*М. Л. Некрасов*

ИФВЭ НИЦ КИ, Протвино

Функция распределения партонов (PDF) при малых  $x$  в быстро движущемся протоне исследуется в усовершенствованной партонной модели, предусматривающей расщепление партонов с ветвлением каскадов, и слияние партонов. В области умеренно малых  $x$  получено степенное поведение партонной плотности  $x f(x)$  с показателем степени пропорциональным логарифму вероятности расщепления партонов. Учет слияния партонов приводит к нелинейному уравнению для PDF. В области очень малых  $x$  обнаружено явление насыщения плотности партонов и получена модельная оценка ее значения в этом режиме. Результаты сравниваются с полученными ранее на основе анализа уравнений в логарифмических аппроксимациях пертурбативной КХД.

[ArXiv:2601.12489](https://arxiv.org/abs/2601.12489)

- ✧ Введение (постановка проблемы, допущения)
- ✧ Учитываем только расщепление партонов
- ✧ Учет слияния партонов
- ✧ Насыщение партонов
- ✧ Сравнение с результатами log pQCD
- ✧ Заключение

- ✓ Исследуются быстро движущиеся протоны на масштабе малых передач, сравнимых с обратным масштабом их поперечных размеров (*свободно или почти свободно движущиеся протоны*)
- ✓ Быстрое движение 
  - Адроны представлены облаком квазисвободных партонов
  - Расщепление и слияние партонов  распределение по импульсам
  - Расщепление идёт вплоть до достижения минимального продольного импульса  $P_{min} \approx \mu$ , ( $\mu \approx 300 \text{ MeV}$ )

Наша цель – получить распределение партонов по продольным импульсам (PDF) на основании параметров, описывающих вероятности их расщепления и слияния

Результат будет моделировать PDF в КХД на масштабе малых передач (в непертурбативной области)

*Забегая вперёд: результат будет получен в области малых  $x$*

## Основное понятие анализа — поколение партонов

*Поколением мы считаем партоны, появившиеся в результате одинакового числа последовательных расщеплений исходного партона-родителя*

Поколения характеризуются номером  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, \bar{n}$

### Модельное допущение:

При расщеплении продольные импульсы делятся пополам между дочерними партонами:

⇒ продольный импульс в  $n$ -ом поколении:  $P_n = P/2^n$ , т.е.  $x_n = 1/2^n$

⇒ максимальное число поколений определяется из условия  $P/2^{\bar{n}} = \mu \Rightarrow \bar{n} = \ln(P/\mu)/\ln 2$

При  $P = 3 \text{ TeV}$  и  $\mu = 300 \text{ MeV}$  это дает  $\bar{n} \approx 13$

### Упрощающие допущения (претендуем на предсказания качественного характера):

- ◆ все партоны генерируются одним родительским партоном, представляющим протон в состоянии покоя
  - при большом числе шагов эволюции (при малых  $x$ ) неточности должны нивелироваться
- ◆ рассматриваем партоны только одного сорта (при малых  $x$  — партоны-глюоны)

## Главное предположение:

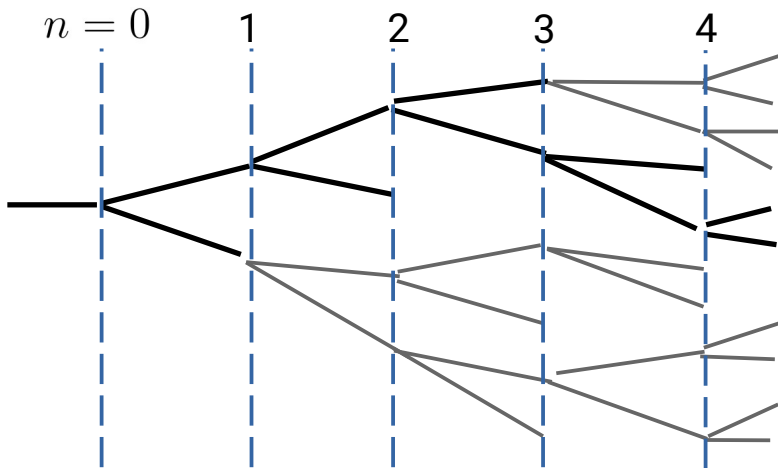
- ▶ партоны расщепляются независимо друг от друга с вероятностью  $w$ , общей для всех партонов ( $\frac{1}{2} \leq w \leq 1$ )

Подразумевается абсолютная вероятность расщепления на протяжении всего развития квантовой флуктуации, к которой принадлежат рассматриваемые партоны

Нас интересуют средние значения чисел заполнения  $N_n$  в каждом поколении, установившиеся в стационарном состоянии быстро движущегося протона

( $N_n$  – не целые!)

- ◆ В каждом поколении расщепляется в среднем  $w$  часть партонов, и это сопровождается появлением удвоенного числа партонов в следующем поколении.
- ◆ Соответственно,  $1-w$  часть партонов не расщепившись остается в данном поколении и выбывает из последующей эволюции



В каждое  $n$ -ое поколение (кроме 0-го) в результате расщеплений партонов предыдущего поколения поступает в среднем  $\tilde{N}_n = (2w)^n$  партонов.

Среди них  $w\tilde{N}_n$  партонов продолжают расщепляться, приводя к появлению  $\tilde{N}_{n+1} = 2w\tilde{N}_n$  партонов в следующем поколении, а  $N_n = (1-w)\tilde{N}_n$  партонов остаются в  $n$ -ом поколении.

Полный импульс системы :

$$x_n = 1/2^n$$

$$\sum_{n=0}^{\bar{n}-1} (1-w)(2w)^n x_n + (2w)^{\bar{n}} x_{\bar{n}} = (1-w) \frac{1-w^{\bar{n}}}{1-w} + w^{\bar{n}} = 1$$

Полное число партонов, порожденных исходным партоном-родителем :

$$\mathcal{N} = \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} (1-w)(2w)^n + (2w)^{\bar{n}} = 1 + w \frac{(2w)^{\bar{n}} - 1}{2w - 1}$$

•  $w \rightarrow 1/2 \implies \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{min} = 1 + \bar{n}/2 \sim \ln(P/\mu)$  ←

мультипериферический режим  
(без ветвлений)

•  $w \rightarrow 1 \implies \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{max} = 2^{\bar{n}} = P/\mu$  ←

полное расщепление и  
отсутствие партонов во всех  
поколениях кроме последнего

•  $1/2 < w < 1 \implies \mathcal{N} \sim (P/\mu)^{\delta_w}$ , ←

степенной рост числа партонов --  
характерный признак режима с  
ветвлением каскадов

$$\delta_w = \ln(2w)/\ln(2), \quad 0 < \delta_w < 1$$



Приводит к степенному росту сечений мягких неупругих столкновениях адронов.

Однако, рост множественности вторичных адронов мультипериферический  $\sim \ln(P/\mu)$

## Непрерывная функция распределения $f(x)$

при  $\Delta n = 1$  цепочка равенств:  $\boxed{\Delta x_n \equiv x_{n-1} - x_n = 1/2^{n-1} - 1/2^n = x_n \Delta n}$

$$\boxed{\Delta x_n = x_n \Delta n}$$

число партонов внутри интервала  $\Delta x_n$  равно  $f(x_n) \Delta x_n$

число партонов внутри интервала  $\Delta n$  равно  $N_n \Delta n$

$$\boxed{x_n f(x_n) = N_n}$$

$$\underline{N_n = (1 - w)(2w)^n} \Rightarrow$$

$$\boxed{xf(x) = (1 - w)e^{-\ln(2w) \ln(x)/\ln(2)} = (1 - w)x^{-\delta_w}}$$

$$n = -\ln(x)/\ln(2)$$

$$\delta_w = \ln(2w)/\ln(2), \quad 0 < \delta_w < 1$$

### Значения параметров (иллюстративно)

мягкий померон  $\delta_w \approx 0.1 \Rightarrow w \approx 0.54$

жесткий померон  $\delta_w \approx 0.3 \Rightarrow w \approx 0.62$

$$P = 3 \text{ TeV}, \quad \bar{n} \approx 13, \quad N_{min} \approx 8$$

$$\mathcal{N} \approx 12$$

$$\mathcal{N} \approx 41$$

- любые два партон в одном поколении (обладающие одинаковыми импульсам) могут с вероятностью  $v$  слиться и образовать один новый партон

В каждое  $n$ -ое поколение в результате расщеплений в предыдущем поколении и слияний партонов последующего поколения **поступает в среднем**

$$\tilde{N}_n = 2w\tilde{N}_{n-1} + \mathfrak{N}(v, \tilde{N}_{n+1}), \quad \mathfrak{N}(v, N) = vC_N^2 + v^2C_{N-2}^2 + \dots = v \sum_{k=0}^{[N/2]-1} v^k C_{N-2k}^2$$

$$\tilde{N}_0 = 1 + \mathfrak{N}(v, \tilde{N}_1), \quad \tilde{N}_{\bar{n}} = 2w\tilde{N}_{\bar{n}-1} \quad C_N^2 = N(N-1)/2$$

при  $2w > 1$  величина  $\tilde{N}_n$  монотонно растет с ростом  $n$

После расщеплений и слияний, в  $n$ -ом поколении остаётся

$$N_n = (1 - w)\tilde{N}_n - 2\mathfrak{N}(v, \tilde{N}_n) \quad \Rightarrow \quad \text{при малом } v \quad N_n = \tilde{N}_n (1 - w + v - v\tilde{N}_n)$$

Условие самосогласованности:

сумма вероятностей расщепиться или слиться с другим партоном не должна превышать 1:

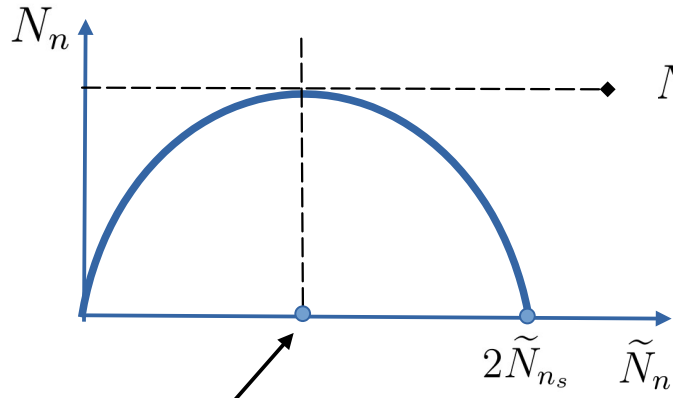
$$w + v(\tilde{N}_n - 1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{N}_n \leq (1 - w + v)/v \quad \Rightarrow \quad N_n \geq 0$$

Ввиду монотонности  $\tilde{N}_n$  означает ограничение на  $n$ .

Однако, как быть, если "критическое"  $n < \bar{n}$ ?

$$N_n = \tilde{N}_n (1 - w + v - v\tilde{N}_n)$$

$N_n$  не является монотонной функцией  $n$ , поскольку описывается параболой как функция  $\tilde{N}_n$



$$N_{n_s} = \frac{(1 - w + v)^2}{4v} = x_s f(x_s)$$

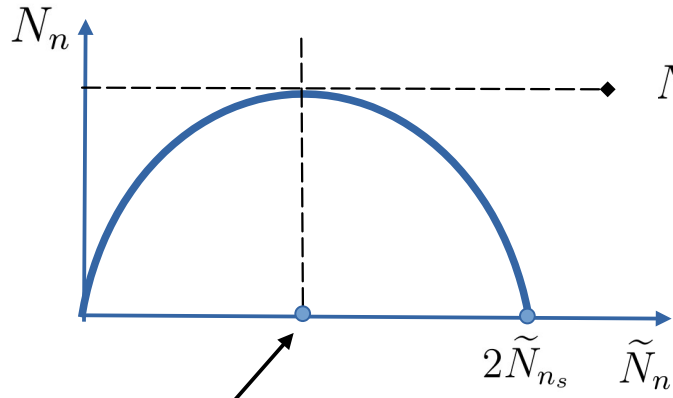
$$x_s = 1/2^{n_s} \text{ или } x_s \sim v^{1/\delta_w}$$

$$\tilde{N}_{n_s} = \frac{1 - w + v}{2v}$$

Полагая  $\tilde{N}_{n_s} \rightarrow (2w)^{n_s}$  при  $v \rightarrow 0$ , получим  $n_s \rightarrow \ln(1/v) [\ln(2w)]^{-1}$

$$N_n = \tilde{N}_n (1 - w + v - v\tilde{N}_n)$$

$N_n$  не является монотонной функцией  $n$ , поскольку описывается параболой как функция  $\tilde{N}_n$



$$N_{n_s} = \frac{(1 - w + v)^2}{4v} = x_s f(x_s)$$

$$x_s = 1/2^{n_s} \text{ или } x_s \sim v^{1/\delta_w}$$

$$\tilde{N}_{n_s} = \frac{1 - w + v}{2v}$$

Полагая  $\tilde{N}_{n_s} \rightarrow (2w)^{n_s}$  при  $v \rightarrow 0$ , получим  $n_s \rightarrow \ln(1/v) [\ln(2w)]^{-1}$

При  $n > n_s$  ожидаем смены режима: свободное расщепление и слияние партонов заменяется режимом, в котором существенны коллективные эффекты

$$n_s < \bar{n} \implies P > P_s, \text{ где } P_s/\mu \simeq v^{-1/\delta_w}$$

плотная партоновая среда

$$\begin{aligned} dN(y)/dy &= x f(x) \\ y &= y_{hadron} - \ln(1/x) \end{aligned}$$



$$\frac{dN(y)}{dy} \simeq \frac{(1 - w + v)^2}{4v}$$

при  $y \simeq y_s$

## Партонная модель

прямой подсчет среднего числа партонов в каждом поколении с учетом ветвления каскадов

Определяется непосредственно сечение путем некогерентного суммирования вкладов. (Амплитуда НЕ определяется!)

$$xf(x) \sim x^{-\delta_w}$$

$$\delta_w = \ln(2w)/\ln(2), \quad 0 < \delta_w < 1$$

Нелинейное рекуррентное ур-ие, описывающее эволюцию плотности партонов с ростом числа поколений  $n \sim \ln(1/x)$

Насыщение возникает (с дальнейшим уменьшением  $x$ ) исключительно вследствие достижения критического значения плотности партонов

## Log pQCD

### Умеренно малые $x$

БФКЛ: анализ неупругой амплитуды в мультiredжеонной кинематике;

Рассматривается одна ветвь расщеплений реджезованного глюона в  $t$ -канале  $\Rightarrow$  в полном сечении суммируется лестница вкладов

$$xf(x) \sim x^{-\delta_w}$$

$$\delta_w = (12\alpha_s \ln 2 / \pi) (1 - 6.5\alpha_s)$$

### Очень малые $x$

Нелинейное интегро-дифф. ур-ие (БК), или дифф. ур-ие (ГЛР) описывающее эволюцию плотности партонов с ростом  $Y = \ln(1/x)$  и  $\ln(Q^2)$

Насыщение возникает при фиксированном  $x$  с убыванием  $Q^2$ , приводящим к перекрытию поперечн. площади протона растущими поперечниками партонов-глюонов

- ✓ Проведенный анализ показывает, что основные свойства партонных распределений в области малых  $x$  могут быть описаны в партонной модели при помощи двух параметров --- вероятностей расщепления и слияния партонов.
- ✓ На качественном уровне наши результаты в основных чертах сходятся с полученными ранее на основе анализа уравнений в логарифмических приближениях pQCD.
- ✓ Это дает основание для дальнейшего развития модели с целью достижения приемлемого количественного описания.
- ✓ Существенные различия в деталях с результатами pQCD ставят вопрос о необходимости пересмотра некоторых выводов, полученных в этом подходе.  
Дальнейшие исследования должны прояснить этот вопрос.

*Спасибо за внимание !*

