



Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН  
ИЯФ им. Г.И.Будкера СО РАН

**УРОВНИ ЭНЕРГИИ ТЕТРАЛЕПТОНОВ В  
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Пометко Д.К., Мартыненко А.П., Мартыненко  
Ф.А., Эскин А.В.

Самарский национальный исследовательский  
университет им. акад. С.П.Королева  
Физический факультет

11 марта 2026 г.  
Новосибирск



## Цели и задачи исследования

### Цели исследования:

- развить вариационный метод на случай 4 частиц в квантовой электродинамике в пакете Matlab;
- изучить уровни энергии тетралептонов  $Ps_2 (e^-e^+e^-e^+)$ ,  $HPs (p e^-e^-e^+)$ ,  $Mu_2 (\mu^+e^-\mu^+e^-)$ ,  $HMu (p e^-\mu^+e^-)$ ,  $MuPs (\mu^+e^-e^+e^-)$ ,  $TMu_2 (\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-)$  в рамках вариационного подхода.

### Задачи:

1. построить гамильтониан четырёхчастичной кулоновской системы в квантовой электродинамике;
2. выполнить расчёт матричных элементов гамильтониана с гауссовскими волновыми функциями;
3. выполнить расчёт энергии основного состояния тетралептонов  $Ps_2 (e^-e^+e^-e^+)$ ,  $HPs (p e^-e^-e^+)$ ,  $Mu_2 (\mu^+e^-\mu^+e^-)$ ,  $HMu (p e^-\mu^+e^-)$ ,  $MuPs (\mu^+e^-e^+e^-)$ ,  $TMu_2 (\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-)$  в пакете Matlab;
4. выполнить расчёт сверхтонкой структуры спектра  $HPs (p e^-e^-e^+)$ ,  $MuPs (\mu^+e^-e^+e^-)$ .



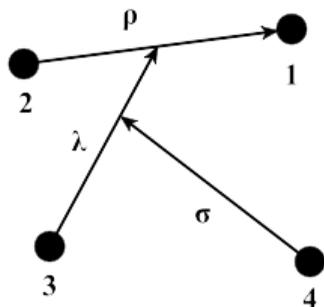


Рис. 1: Координаты Якоби для 4-частичной системы

Координаты Якоби  $(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma})$ :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (1)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_3, \quad (2)$$

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \vec{r}_4. \quad (3)$$

Связь координат частиц с  $(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma})$ :

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_4}{m_{1234}} \vec{\sigma} - \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \vec{\rho} + \vec{R}, \quad (4)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_4}{m_{1234}} \vec{\sigma} - \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \vec{\rho} + \vec{R}, \quad (5)$$

$$\vec{r}_3 = -\frac{m_4}{m_{1234}} \vec{\sigma} + \frac{m_{12}}{m_{123}} \vec{\lambda} + \vec{R}, \quad (6)$$

$$\vec{r}_4 = -\frac{m_4}{m_{1234}} \vec{\sigma} + \vec{R}. \quad (7)$$

Уравнение Шредингера:

$$H\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4). \quad (8)$$

Волновая функция четырёхчастичной системы:

$$\Psi = \sum_{i=1}^K C_i \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A), \quad (9)$$

$$\phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A) = e^{-\frac{1}{2}[A_{11}\vec{\rho}^2 + A_{22}\vec{\lambda}^2 + A_{33}\vec{\sigma}^2 + 2A_{12}\vec{\rho}\vec{\lambda} + 2A_{13}\vec{\rho}\vec{\sigma} + 2A_{23}\vec{\lambda}\vec{\sigma}]}. \quad (10)$$



Уравнение Шредингера в матричном виде:

$$HC = E^\lambda BC. \quad (11)$$

Матричные элементы матрицы нормировочных коэффициентов В и гамильтониана Н:

$$B_{ij} = \langle \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^j) | \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^i) \rangle, \quad (12)$$

$$H_{ij} = \langle \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^j) | H | \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^i) \rangle. \quad (13)$$

Связь между элементами матриц А и В:

$$B_{ij} = A_{ij} + A'_{ij}. \quad (14)$$

Дополнительные обозначения:

$$\psi = \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^i), \quad \psi' = \phi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, A^j),$$

Расчёт матричных элементов нормировки:

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \iiint d\vec{\rho} d\vec{\lambda} d\vec{\sigma} e^{-\frac{1}{2}[B_{11}\vec{\rho}^2 + B_{22}\vec{\lambda}^2 + B_{33}\vec{\sigma}^2 + 2B_{12}\vec{\rho}\vec{\lambda} + 2B_{13}\vec{\rho}\vec{\sigma} + 2B_{23}\vec{\lambda}\vec{\sigma}]} = \left[ \frac{8\pi^3}{\det B} \right]^{3/2}. \quad (15)$$

Определитель матрицы В:

$$\det B = B_{11}B_{22}B_{33} - B_{11}B_{23}^2 - B_{12}^2B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - B_{13}^2B_{22}, \quad B_{kl}(I, J) = A_{kl}(I) + A_{kl}(J). \quad (16)$$

Нормировочный коэффициент волновой функции:

$$N = \sum_{I=1}^K \sum_{J=1}^K C_I C_J \frac{(2\pi)^{9/2}}{\det B(I, J)^{3/2}} \quad (17)$$



Гамильтониан четырёхчастичной системы в нерелятивистском приближении:

$$H = \frac{\vec{p}_\rho^2}{2\mu_1} + \frac{\vec{p}_\lambda^2}{2\mu_2} + \frac{\vec{p}_\sigma^2}{2\mu_3} + \frac{q_1 q_2}{|\vec{\rho}|} + \frac{q_1 q_3}{|\vec{\lambda} + \frac{m_2}{m_{12}} \vec{\rho}|} + \quad (18)$$

$$+ \frac{q_1 q_4}{|\vec{\sigma} + \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} + \frac{m_2(m_{12}-m_3)}{m_{123}m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{\lambda} - \frac{m_1}{m_{12}} \vec{\rho}|} +$$

$$+ \frac{q_2 q_4}{|\vec{\sigma} + \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} + \frac{m_3 m_2 - m_{13} m_{12}}{m_{123} m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_3 q_4}{|\vec{\sigma} - \frac{m_{12}}{m_{123}} \vec{\lambda}|}.$$

Оператор кинетической энергии:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \nabla_\rho^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \nabla_\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_3} \nabla_\sigma^2, \quad (19)$$

где  $\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_{12}}$ ,  $\mu_2 = \frac{m_{12} m_3}{m_{123}}$ ,  $\mu_3 = \frac{m_{123} m_4}{m_{1234}}$  - приведённые массы для частиц (1, 2), ((1, 2), 3), ((1, 2, 3), 4) соответственно.

Матричные элементы кинетической энергии:

$$\langle \psi' | \hat{T} | \psi \rangle = \int e^{-\frac{1}{2}(A_{11}^j \vec{\rho}^2 + 2A_{12}^j \vec{\rho} \vec{\lambda} + A_{22}^j \vec{\lambda}^2 + 2A_{13}^j \vec{\rho} \vec{\sigma} + \quad (20)$$

$$+ 2A_{23}^j \vec{\lambda} \vec{\sigma} + A_{33}^j \vec{\sigma}^2)} \cdot \hat{T} \cdot e^{-\frac{1}{2}(A_{11}^j \vec{\rho}^2 + 2A_{12}^j \vec{\rho} \vec{\lambda} + A_{22}^j \vec{\lambda}^2 +$$

$$+ 2A_{13}^j \vec{\rho} \vec{\sigma} + 2A_{23}^j \vec{\lambda} \vec{\sigma} + A_{33}^j \vec{\sigma}^2)} d\vec{\rho} d\vec{\lambda} d\vec{\sigma}.$$

Матричные элементы кинетической энергии в явном виде:

$$\langle \psi' | \hat{T} | \psi \rangle = -\frac{24\sqrt{2}\pi^{9/2}}{(\det B)^{5/2}} \left( \frac{\hbar^2}{\mu_1} I_\rho + \frac{\hbar^2}{\mu_2} I_\lambda + \frac{\hbar^2}{\mu_3} I_\sigma \right), \quad (21)$$

$$I_\rho = A_{11}^2 (B_{22} B_{33} - B_{23}^2) + A_{11} (2A_{12} (B_{13} B_{23} - \quad (22)$$

$$- B_{12} B_{33}) + 2A_{13} (B_{12} B_{23} - B_{13} B_{22}) - \det B) +$$

$$+ A_{12}^2 (B_{11} B_{33} - B_{13}^2) + A_{13}^2 (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) +$$

$$+ 2A_{12} A_{13} (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}),$$

$$I_\lambda = A_{12}^2(B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + 2A_{22}A_{12}(B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + 2A_{22}A_{23}(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}) - A_{22}^2 \det B + 2A_{12}A_{23}(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}) + A_{22}^2(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + A_{23}^2(B_{11}B_{22} - B_{12}^2), \quad (23)$$

$$I_\sigma = A_{13}^2(B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + A_{23}^2(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + A_{33}^2(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) + A_{23}(2A_{13}(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}) + 2A_{23}^2(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23} - \det B) + 2A_{13}A_{23}(B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33})). \quad (24)$$

Оператор потенциальной энергии:

$$\hat{V} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{\rho}|} + \frac{q_1 q_3}{|\vec{\lambda} + \frac{m_2}{m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_1 q_4}{|\vec{\sigma} + \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} + \frac{m_2(m_{12}-m_3)}{m_{123}m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{\lambda} - \frac{m_1}{m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_2 q_4}{|\vec{\sigma} + \frac{m_3}{m_{123}} \vec{\lambda} + \frac{m_3 m_2 - m_{13} m_{12}}{m_{123} m_{12}} \vec{\rho}|} + \frac{q_3 q_4}{|\vec{\sigma} - \frac{m_{12}}{m_{123}} \vec{\lambda}|}. \quad (25)$$

Матричные элементы потенциальной энергии:

$$\langle \psi' | \hat{V} | \psi \rangle = \int e^{-\frac{1}{2}(A_{11}^j \vec{\rho}^2 + 2A_{12}^j \vec{\rho} \vec{\lambda} + A_{22}^j \vec{\lambda}^2 + 2A_{13}^j \vec{\rho} \vec{\sigma} + 2A_{23}^j \vec{\lambda} \vec{\sigma} + A_{33}^j \vec{\sigma}^2)} \cdot \hat{V} \cdot e^{-\frac{1}{2}(A_{11}^j \vec{\rho}^2 + 2A_{12}^j \vec{\rho} \vec{\lambda} + A_{22}^j \vec{\lambda}^2 + 2A_{13}^j \vec{\rho} \vec{\sigma} + 2A_{23}^j \vec{\lambda} \vec{\sigma} + A_{33}^j \vec{\sigma}^2)} d\vec{\rho} d\vec{\lambda} d\vec{\sigma}. \quad (26)$$

Матричные элементы потенциальной энергии парных кулоновских взаимодействий:

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{(B_{11}B_{33} - B_{13}^2 - \frac{m_2}{m_{12}}(2B_{12}B_{33} - 2B_{13}B_{23} - \frac{m_2}{m_{12}}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2))}}, \quad (27)$$

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}}, \quad (28)$$

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{(B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - \frac{m_{12}}{m_{123}}(2B_{12}B_{13} - 2B_{11}B_{23} - \frac{m_{12}}{m_{123}}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2))}}, \quad (29)$$

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{B_{11}B_{33} - B_{13}^2 + \frac{m_1}{m_{12}}(2B_{12}B_{33} - 2B_{13}B_{23} + \frac{m_1}{m_{12}}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2))}}, \quad (30)$$

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{F_{14}}}, \quad (31)$$

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} \right\rangle = \frac{32\pi^4}{\det B \sqrt{F_{24}}}, \quad (32)$$

где введены вспомогательные обозначения

$$F_{14} = \frac{m_3}{m_{123}}(2B_{12}B_{13} - 2B_{11}B_{23}) + \frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + \quad (33)$$

$$+ \frac{m_2}{m_{12}} \left( \frac{m_3}{m_{123}}(2B_{13}B_{23} - 2B_{12}B_{33}) + 2B_{12}B_{23} - 2B_{13}B_{22} \right) + \frac{m_2^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2),$$

$$F_{24} = \frac{m_3}{m_{123}}(2B_{12}B_{13} - 2B_{11}B_{23}) + \frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + \quad (34)$$

$$+ \frac{m_1}{m_{12}} \left( \frac{m_3}{m_{123}}(2B_{13}B_{23} - 2B_{12}B_{33}) + 2B_{12}B_{23} - 2B_{13}B_{22} \right) + \frac{m_1^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2).$$



Входные данные StartData.txt:

1,1,1,1 - массы частиц

-1,1,-1,1 – заряды частиц

0.00001,25 –  $b_{min}$ ,  $b_{max}$

Выходные данные:

$E = -0.515982$

Шаги вычислений в программе:

1. генерация 10 наборов нелинейных вариационных параметров в базисе в 200 функций;
2. увеличение базиса в разложении (9) до 800 функций;
3. запуск циклов уточнения (=1000).

Более ранние версии программы:

1. A.V.Eskin, V.I.Korobov, A.P.Martynenko, F.A.Martynenko, Three Particle Muon-Electron Bound Systems in Quantum Electrodynamics, Atoms 11, no. 2, 25 (2023);
2. V.I.Korobov, A.V.Eskin, A.P.Martynenko, F.A. Martynenko, Energy levels of mesonic helium in quantum electrodynamics, Phys. Rev. A 109, 032802, (2024).



# Уровни энергии связанных состояний лептонов

Состояние	$E$ , а.е.м.	$E_{\text{теор}}$ , а.е.м.
$Ps_2 (e^- e^+ e^- e^+)$	-0.515982	-0.516003 (S.Bubin, L.Adamowich, 2006)
$HPs (p e^- e^- e^+)$	-0.788819	-0.788870 (S.Bubin, L.Adamowich, 2006) -0.7888767 (S.Bubin, K.Varga, 2011)
$Mu_2 (\mu^+ e^- \mu^+ e^-)$	-1.140230	-1.141013 (M.-S. Wu, Y.Zhang, J.-Y.Zhang, K.Varga, Z.-C.Yan, 2024)
$HMu (p e^- \mu^+ e^-)$	-1.148355	-1.1389 (M.Suffczycki, T.Kotowski, L.Wolniewicz, 2002) -1.150187 (B.-L.Zhou, J.-M.Zhu, Z.-Ch.Yan, 2005)
$MuPs (\mu^+ e^- e^+ e^-)$	-0.786262	-0.786317 (A.M.Frolov, 2017)
$TMu_2 (\mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-)$	-106.6603	-



# Внутренняя структура четырёхчастичных систем

$$\langle (r_1 - r_2)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)}{\det B^{5/2}}, \quad (35)$$

$$\langle (r_3 - r_1)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [B_{11}B_{33} - B_{13}^2 + 2\frac{m_2}{m_{12}}(B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + \frac{m_2^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)] \quad (36)$$

$$\langle (r_3 - r_4)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 2\frac{m_{12}}{m_{123}}(B_{11}B_{23} - B_{12}B_{13}) + \frac{m_{12}^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2)] \quad (37)$$

$$\langle (r_2 - r_3)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [B_{11}B_{33} - B_{13}^2 + 2\frac{m_1}{m_{12}}(B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}) + \frac{m_1^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)] \quad (38)$$

$$\langle (r_1 - r_4)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 2\frac{m_2}{m_{12}}(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}) + \frac{m_2^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + \quad (39)$$

$$+ 2\frac{m_2}{m_{12}} \frac{m_3}{m_{123}}(B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + 2\frac{m_3}{m_{123}}(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}) + \frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2)]$$

$$\langle (r_2 - r_4)^2 \rangle = \frac{48\sqrt{2}\pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + 2\frac{m_3}{m_{123}}(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}) + \frac{m_3^2}{m_{123}^2}(B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + \quad (40)$$

$$+ 2\frac{m_1}{m_{12}} \frac{m_3}{m_{123}}(B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}) + 2\frac{m_1}{m_{12}}(B_{13}B_{22} - B_{12}B_{23}) + \frac{m_1^2}{m_{12}^2}(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)]$$





Проиллюстрируем среднеквадратичные расстояния на примере молекулы  $MuPs$ .

Пронумеруем частицы следующим образом:  $e^- \rightarrow 1$ ,  $\mu^+ \rightarrow 2$ ,  $e^- \rightarrow 3$ ,  $e^+ \rightarrow 4$

$$\delta_{12} = \sqrt{\langle (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \rangle} = 2.80 (1.48 \times 10^{-8} \text{ см}), \quad (41)$$

$$\delta_{13} = \sqrt{\langle (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 \rangle} = 4.00 (2.12 \times 10^{-8} \text{ см}), \quad (42)$$

$$\delta_{14} = \sqrt{\langle (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^2 \rangle} = 3.95 (2.09 \times 10^{-8} \text{ см}), \quad (43)$$

$$\delta_{24} = \sqrt{\langle (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^2 \rangle} = 3.95 (2.09 \times 10^{-8} \text{ см}). \quad (44)$$





Общий вид гамильтониана сверхтонкого взаимодействия

$$\Delta V^{hfs}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}) = a_{12}(\vec{s}_1 \vec{s}_2) + a_{34}(\vec{s}_3 \vec{s}_4) + \quad (45)$$

$$+ a_{13}(\vec{s}_1 \vec{s}_3) + a_{14}(\vec{s}_1 \vec{s}_4) + a_{23}(\vec{s}_2 \vec{s}_3) + a_{24}(\vec{s}_2 \vec{s}_4),$$

$$a_{12} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e m_p} \delta(\vec{r}_{12}), \quad (46) \quad a_{23} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e^2} \delta(\vec{r}_{23}), \quad (49)$$

$$a_{13} = \frac{8\pi\alpha}{3m_e m_p} \delta(\vec{r}_{13}), \quad (47) \quad a_{24} = \frac{8\pi\alpha}{3m_e^2} \delta(\vec{r}_{24}), \quad (50)$$

$$a_{14} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e m_p} \delta(\vec{r}_{14}), \quad (48) \quad a_{34} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e^2} \delta(\vec{r}_{34}), \quad (51)$$

где  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) - спиновые операторы частиц.

Спиновая волновая функция четырех

частиц:

$$\chi_{00}^{00} = \frac{1}{2} (\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow), \quad (52)$$

$$\chi_{11}^{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow), \quad (53)$$

$$\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (54) \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\chi_{00}^{11} = \frac{1}{\sqrt{12}} (2 \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \quad (56)$$

$$- \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow + 2 \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow),$$

$$\chi_{11}^{11} = \frac{1}{2} (\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow), \quad (57)$$

$$\chi_{22}^{11} = \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \quad (58)$$

$$\chi_{11}^{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow). \quad (59)$$



# Сверхтонкая структура спектра

С учётом  $\langle \delta(\vec{r}_{12}) \rangle = \langle \delta(\vec{r}_{14}) \rangle$ ,  $\langle \delta(\vec{r}_{23}) \rangle = \langle \delta(\vec{r}_{34}) \rangle$

получим:

$$\Delta E^{hfs} = -\frac{8\pi\alpha}{3m_e m_p} (\vec{s}_1 \vec{s}_{24}) \langle \delta(\vec{r}_{12}) \rangle - \quad (60)$$

$$-\frac{8\pi\alpha}{3m_e^2} (\vec{s}_3 \vec{s}_{24}) \langle \delta(\vec{r}_{23}) \rangle + \frac{8\pi\alpha}{3m_e m_p} (\vec{s}_1 \vec{s}_3) \langle \delta(\vec{r}_{13}) \rangle$$

При  $\vec{s}_{24} = 0$ :

$$\Delta E^{hfs} = \frac{8\pi\alpha^4 m_e^2}{3m_p} (\vec{s}_1 \vec{s}_3) \langle \delta(\vec{r}_{13}) \rangle \quad (61)$$

Матричный элемент  $\langle \delta(\vec{r}_{13}) \rangle$ :

$$\langle \delta(\vec{r}_{13}) \rangle = 8\pi^3 \left( \frac{m_3^2}{m_{123}^2} (B_{11} B_{33} - B_{13}^2) + \quad (62)$$

$$+ \frac{m_1^2}{m_{12}^2} (B_{22} B_{33} - B_{23}^2) + B_{11} B_{22} - B_{12}^2 +$$

$$+ 2 \frac{m_3}{m_{123}} (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}) + 2 \frac{m_1}{m_{12}} (B_{13} B_{22} -$$

$$- B_{12} B_{23}) + 2 \frac{m_3}{m_{123}} \frac{m_1}{m_{12}} (B_{12} B_{33} - B_{13} B_{23}) \right)^{-3/2}$$

Связанное состояние	$\langle \delta(\vec{r}_{13}) \rangle$	$\Delta E^{hfs}$ , МГц	$\Delta E_{\text{теор}}^{hfs}$ , МГц
<i>HPs</i>	0.001582	2.692	3.61 (A.M. Frolov, D.M. Wardlaw, Hyperfine structure and (e-, e+)-pair annihilation in the muonium-positronium MuPs and positronium hydrides, 2010)
<i>MuPs</i>	0.001684	22.458	23.064 (A.M. Frolov, Internal structure and positron annihilation in the four-body MuPs system, 2021)

