

Квантовополевой подход в исследовании нелинейного канала связи с малой второй дисперсией

А. В. Резниченко¹ В. О. Губа¹

¹ИЯФ СО РАН

Распространение сигнала

Распространение сигнала описывается нелинейным уравнением Шредингера с аддитивным белым гауссовским шумом [1]:

$$\partial_z \psi + i\beta \partial_t^2 \psi - i\gamma |\psi|^2 \psi = \eta(z, t), \quad (1)$$

где функция $\psi(z, t)$ — это огибающая электрического поля внутри оптоволоконного канала, $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_0 \text{Re}\{\psi(z, t + \frac{z}{v_g}) e^{ik_0 z - i\omega_0 t}\}$, ω_0 и k_0 — частота и волновой вектор несущей волны, \vec{e}_0 — вектор поляризации. Параметры β и γ — это вторая дисперсия и керровская нелинейность. Начальный сигнал задается условием $\psi(z=0, t) = X(t)$.

Мы предполагаем, что гауссовский шум $\eta(z, t)$ характеризуется следующими корреляционными функциями:

$$\langle \eta(z, t) \rangle_\eta = 0, \quad \langle \eta(z, t) \bar{\eta}(z', t') \rangle_\eta = \frac{Q}{\pi(t-t')} \delta(z-z') \sin \frac{W'(t-t')}{2} \xrightarrow{W' \rightarrow \infty} Q \delta(t-t') \delta(z-z'), \quad (2)$$

где W' — спектральная ширина корреляционной функции, играющая роль ультрафиолетового обрезания, Q — мощность шума на единицу длины канала и на единицу частоты.

Информационные характеристики

Важнейший объект работы — это функционал плотности условной вероятности $P[Y|X]$, представляющий собой плотность вероятности зарегистрировать сигнал $Y(t)$ на выходе из канала при условии, что начальный сигнал равен $X(t)$. Функционал $P[Y|X]$ в нашей работе можно представить в виде следующего интеграла по траекториям [3]:

$$P[Y|X] = \int_{\psi(z=0, t)=X(t)}^{\psi(z=L, t)=Y(t)} \mathcal{D}\psi \exp\{-S[\psi]/Q\}, \quad (3)$$

где $S[\psi]$ — функционал действия, представляющий собой интеграл от квадрата левой части уравнения (1):

$$S[\psi] = \int_0^L dz \int dt |\partial_z \psi + i\beta \partial_t^2 \psi - i\gamma |\psi|^2 \psi|^2. \quad (4)$$

С помощью функционала $P[Y|X]$ могут быть вычислены остальные информационные характеристики, в том числе взаимная информация I_{P_X} .

Параметры начального сигнала

Рассматриваются начальные сигналы $X(t)$, обладающие фиксированной средней мощностью P_{av} и средней спектральной шириной W_X :

$$P_{av} = \int \frac{dt}{T} \langle |X(t)|^2 \rangle_{P_X}, \quad W_X^2 = \int \frac{dt}{T} \langle |\dot{X}(t)|^2 \rangle_{P_X} / \int \frac{dt}{T} \langle |X(t)|^2 \rangle_{P_X}, \quad (5)$$

где усреднение $\langle \dots \rangle_{P_X} = \int \mathcal{D}X(\dots) P_X[X]$ производится по распределению начального сигнала $P_X[X]$, имеющему вид:

$$P_X[X] = \Lambda_X \exp\left[-\frac{1}{P} \int \frac{dt}{T} \left\{ |X|^2 + \left(\frac{T}{2\xi}\right)^2 |\dot{X}|^2 \right\}\right], \quad (6)$$

где Λ_X — нормировочный множитель, а параметры P и ξ определяются из условий (5). Все введенные частоты W_X , W_d и W' удовлетворяют следующим неравенствам:

$$W_X \ll W_d \ll W'. \quad (7)$$

Модель приемника

Реалистичный приемник на выходе из канала не регистрирует гармоники сигнала $Y(t)$ с произвольно высокими частотами. Одним из способов учета этого эффекта является интегрирование функционала $P[Y|X]$ по ненаблюдаемым степеням свободы:

$$P_d[Y_d(\omega)|X] = \int_{\{Y(\omega); |\omega| > \frac{W_d}{2}\}} \mathcal{D}Y P[Y(\omega)|X], \quad (8)$$

которыми являются Фурье-гармоники $Y(\omega)$ с частотами, лежащими за пределами спектральной ширины приемника W_d . Для полученного нами в результате разложения по β функционала $P[Y|X]$ произвести интегрирование (8) оказывается затруднительно. По этой причине для вычисления информационных характеристик мы вводим другой функционал:

$$\tilde{P}_d[\tilde{Y}_d(\omega)|X] \int_{\{\tilde{Y}(\omega); |\omega| > \frac{W_d}{2}\}} \mathcal{D}\tilde{Y} P[\tilde{Y}(\omega)|X], \quad (9)$$

и функции $Y(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ связаны преобразованием следующего вида:

$$Y_i(t) = \sum_{j=1,2} B_{ij}(t) y_j(t) + \Phi_i(t), \quad (10)$$

где $Y(t) = Y_1(t) + iY_2(t)$, $\tilde{Y}(t) = y_1(t) + iy_2(t)$. Характерный масштаб изменения функций $B_{ij}(t)$ определяется масштабом изменения медленного начального сигнала $X(t)$. В работе показано, что для рассматриваемых $X(t)$ высокочастотные Фурье-гармоники функций $Y_{1,2}(t)$ и $y_{1,2}(t)$ связаны постоянной ортогональной матрицей. По этой причине можно ожидать, что функционал $\tilde{P}_d[\tilde{Y}_d|X]$ является хорошим приближением функционала $P_d[Y_d|X]$.

Постановка задачи

Основной задачей настоящей работы является вычисление взаимной информации I_{P_X} для описанного ранее канала связи и распределения начального сигнала в пределе малых дисперсий:

$$\beta L W_X^2 \ll 1, \quad (11)$$

Где L — длина канала связи, W_X — средняя спектральная ширина начального сигнала. Безразмерный параметр $\beta L W_X^2$ представляет собой малый параметр, по которому строится теория возмущений.

Результаты

Для взаимной информации I_X нами были получено выражение в главном порядке по малой дисперсии, а также первая поправка:

$$I_{P_X} = H_X + (M_d - 1) \ln \left[\frac{\tilde{\delta}_t}{\pi \epsilon Q L} \right] - (M_d - 1) \int_T \frac{dt}{T} \left\langle \ln \sqrt{1 + \mu^2/3} \right\rangle_{P_X} + (M_d - 1) \beta L W_d^2 I_d(P_{av}, W_X) - (M_d - 1) \beta L W_X^2 I_X(P_{av}, W_X), \quad (12)$$

$$I_d(P_{av}, W_X) = \frac{1}{12} \int_T \frac{dt}{T} \left\langle \frac{4\mu^3}{15(3 + \mu^2)} \right\rangle_{P_X}, \quad (13)$$

$$I_X(P_{av}, W_X) = \frac{1}{W_X^2} \int_T \frac{dt}{T} \langle f(\mu) \mu^2 \rangle_{P_X}, \quad (14)$$

$$f(\mu) = \frac{\mu}{15(3 + \mu^2)^3 (9 + 4\mu^2)^2} (10206 + 21303\mu^2 + 15399\mu^4 + 4644\mu^6 + 496\mu^8). \quad (15)$$

Усреднения $\langle \dots \rangle_{P_X}$ представляют собой интеграл по реализациям начального сигнала $X(t)$. Эти интегралы вычислялись в дискретизации с шагом $\tilde{\delta}_t = T/M_d$, связанным со спектральной шириной приемника: $W_d = 2\pi M_d/T$. Функция $\mu(t)$ выражается через модуль начального сигнала: $\mu(t) = \gamma L |X(t)|^2$.

Для демонстрации поведения взаимной информации как функции P_{av} рассмотрим следующие параметры канала и приемника: $\gamma = 1.25$ (Вт км)⁻¹, $L = 800$ км, $Q = 10^{-21}$ Вт/(км Гц), $T = 10^{-9}$ с, $W_d \approx 64$ ГГц. На рис. 1 приведена бездисперсионная часть $I_{P_X}/(M_d - 1)$ для $W_X \approx 5$ ГГц и $\beta = 10^{-25}$ с²/км. На рис. 2 показана взаимная информация на канал $I_{P_X}/(M_d - 1)$ для различных значений W_X при $\beta = 10^{-24}$ с²/км.

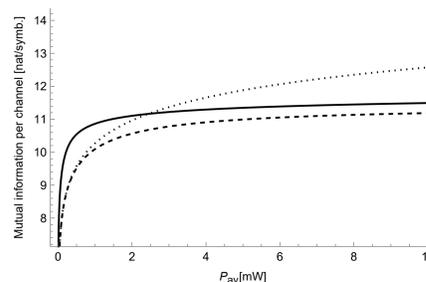


Рисунок 1. Взаимная информация на канал, т.е. деленная на $M_d - 1$, для линейного канала (пунктирная линия), для бездисперсионной части I_{P_X} из ур. (12) (штриховая линия), для взаимной информации бездисперсионного канала из работы [2] (сплошная линия).

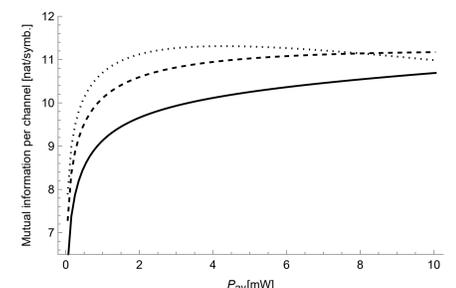


Рисунок 2. Взаимная информация (12) на канал для различных значений ширины начального сигнала W_X и для $\beta = 10^{-24}$ с²/км. Сплошная линия соответствует $W_X \approx 3$ ГГц, штриховая линия — $W_X \approx 5$ ГГц, пунктирная линия — $W_X \approx 7$ ГГц.

Заключение

В работе рассмотрена задача вычисления взаимной информации для нелинейного оптоволоконного канала связи в случае малого безразмерного параметра дисперсии. Полученное пертурбативное разложение для функционала плотности условной вероятности $P_d[Y_d|X]$ и для взаимной информации I_{P_X} справедливо при выполнении условий $\beta L W_X^2 \ll 1$, $\beta L W_d^2 \lesssim 1$ и $W_X \ll W_d$. Полученное выражение для взаимной информации (12) может быть использовано как для вычисления передаваемой в единицу времени информации при заданном распределении начального сигнала $P_X[X]$, так и для нахождения оптимального распределения начального сигнала и дальнейшего вычисления емкости канала. Для демонстрации нашего метода мы вычисляем взаимную информацию для гауссовского распределения начального сигнала с фиксированной средней мощностью P_{av} и с фиксированной средней спектральной шириной W_X .

Список литературы

- [1] Hermann A Haus. Quantum noise in a solitonlike repeater system. *JOSA B*, 8(5):1122–1126, 1991.
- [2] AV Reznichenko, AI Chernykh, SV Smirnov, and IS Terekhov. Log-log growth of channel capacity for nondispersive nonlinear optical fiber channel in intermediate power range: Extension of the model. *Physical Review E*, 99(1):012133, 2019.
- [3] I S Terekhov, S S Vergeles, and S K Turitsyn. Conditional probability calculations for the nonlinear schrödinger equation with additive noise. *Physical Review Letters*, 113(23):230602, 2014.