



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ им. В.Е. ЗУЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Решение прикладных задач атмосферной оптики на основе теории переноса излучения в дисперсных средах

в.н.с., руководитель Лаборатории распространения
оптических сигналов, д.ф.-м.н. Тарасенков М.В.

Введение

Теория переноса излучения – классическое направление оптики. Основу теории составляет модель рассеивающей и поглощающей среды, а также уравнение переноса излучения с краевыми условиями, описывающими перенос излучения в среде. Данное направление существует достаточно давно. Можно упомянуть такие классические работы, как [1]-[11] и др. Тем не менее, на данный момент существует достаточно много нерешенных проблем и прикладных задач. Частью из них занимается коллектив нашей лаборатории

-
1. Хвольсон О.Д. Основания математической теории внутренней диффузии света // Журнал Русского физико-химического общества. 1886. Т. 18. Отд. 2. С. 93-101.
 2. Schwarzschild K. Ober des Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre // Gottinger Nachr. 1906. P. 41-53.
 3. Eddington A.S. The Formation of Absorption Lines // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1929. V. 89. P. 620-636.
 4. Амбарцумян В.А. Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины // Изв. АН Арм. ССР. 1944. № 1-2. С. 31-36.
 5. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М: Изд-во иностранной литературы. 1953. 432 с.
 6. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет. М: Изд-во технико-теоретической литературы. 1956. 392 с.
 7. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / под ред. Г.И. Марчука. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1976. 282 с.
 8. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. М.: Наука, 1990. 227 с.
 9. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах / под ред. Ж. Ленобль. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 263с.
 10. Гермогенова Т.А. О влиянии поляризации на распределение интенсивности рассеянного излучения // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 6. С. 854-856.
 11. Сушкевич Т.А., Мишин И.В. Амплитудная и фазовая характеристики рассеивающего слоя // ДАН СССР. 1982, Т.263, №1. С.60–63.

Основой для решения рассматриваемых нами проблем является решение уравнения переноса излучения (УПИ). Основные методы его решения также можно назвать классическими, упомянув такие работы как [1]-[6] и др. Тем не менее и сейчас есть работы, которые развивают подходы к решению УПИ.

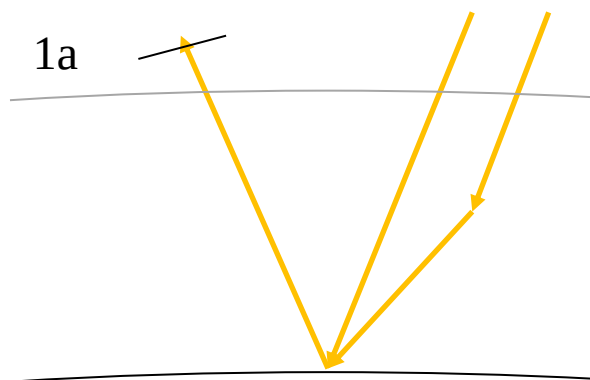
В работах Новосибирской школы методов Монте-Карло (например, [2]-[3]) было сделан значительный вклад в развитие методов решения УПИ. Некоторые из этих результатов послужили основой для наших работ и получили дальнейшее развитие в созданных нами новых подходах и алгоритмах.

-
1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М: Изд-во иностранной литературы. 1953. 432 с.
 2. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / под ред. Г.И. Марчука. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1976. 282 с.
 3. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. М.: Наука, 1990. 227 с.
 4. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах / под ред. Ж. Ленобль. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 263с.
 5. Сушкевич Т.А., Мишин И.В. Амплитудная и фазовая характеристики рассеивающего слоя // ДАН СССР. 1982, Т.263, №1. С.60–63.
 6. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОН. Лаборатория знаний, 2005. 661 с.

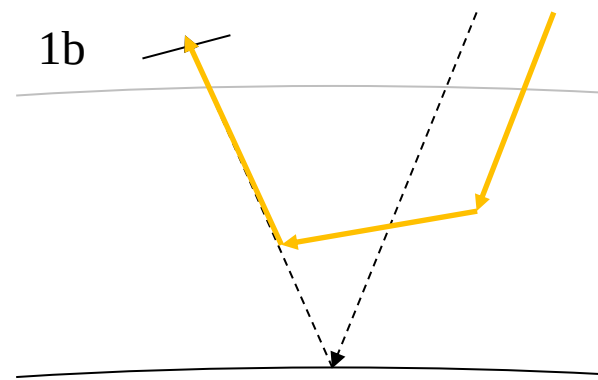
1. Восстановление коэффициентов отражения земной поверхности по спутниковым данным в безоблачном случае

Постановка задачи:

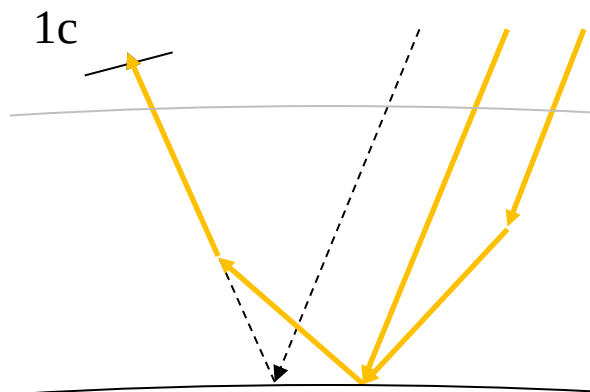
Пусть из спутниковых измерений известны оптические параметры атмосферы, взаимное положение Солнца, спутника и наблюдаемого участка земной поверхности, а также интенсивности (яркости) принимаемого излучения в каналах прибора. Требуется восстановить коэффициент отражения земной поверхности.



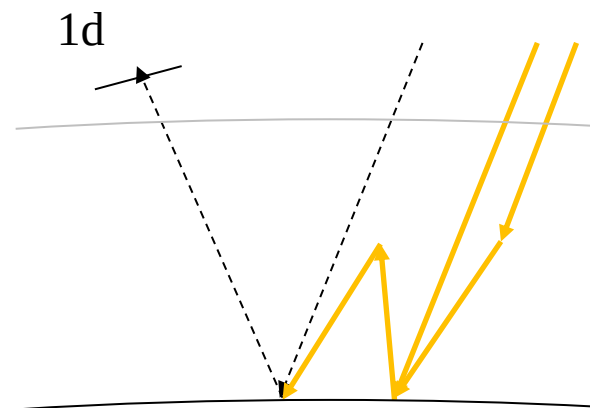
Прямое излучение от наблюдаемого пикселя



Рассеянное в атмосфере излучение



Боковой подсвет



Дополнительная освещенность поверхности отраженным излучением

Альтернативные подходы

Фактор	Авторы алгоритмов							
	Putsay [1]	Tanre [2]	Berk [3]	Vermote [4]	Lyapustin [5]	Лысенко [6]	Катковский [7]	Shi [8]
Модель поверхности	Ламб.	Неламб.	Ламб.	Неламб.	Неламб.	Ламб.	Ламб.	Неламб.
Боковой подсвет	Точн.	Точн.	Прибл.	Прибл.	Точн.	Прибл.	Прибл.	Прибл.
Многократное отражение	Нет	Прибл.	Прибл.	Прибл.	Прибл.	Нет	Прибл.	Прибл.
Молекулярное поглощение	Точн.	Точн.	Точн.	Точн.	Точн.	Точн.	Прибл.	Точн.
Поляризация	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Нет	Нет	Нет
Рельеф	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Да

1. Putsay M. // International Journal of Remote Sensing. 1992, 13(8), P. 1549–1558.
2. Tanre D., Holben B.N., Kaufman Y.J. // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1992, V.30, No. 2. P. 231 – 248.
3. Berk A., Adler-Golden S.M., Ratkowski A.J. et al. // Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion. FUSION 2002. (IEEE Cat.No.02EX5997). 2002, vol. 2. P. 798-803.
4. Vermote E.F.; Vermeulen A. Atmospheric correction algorithm: spectral reflectances (MOD09). 1999.
5. Lyapustin A., Wang Y., Korkin S., Huang D. // Atmos. Meas. Tech., 11, 5741–5765, 2018
6. Лысенко С.А. // Оптика атмосферы и океана. 2017. Т. 30. № 09. С. 775–788.
7. Катковский Л.В. // Оптика атмосферы и океана. 2016. Т. 29. № 09. С. 778–784.
8. Shi H., Xiao Z., Wen J. and Wu S.// IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 60, P. 1-12, 2022

Предлагаемый алгоритм

Предлагаемый подход сводится к решению двух систем уравнений:

$$I_{sum,ij} = I_{sun,ij} + Q_{ij} \left(\delta_{sat,ij} \frac{1}{\pi} \exp(-\tau_{ij}) + A_{ijij} \frac{\Omega_{ij}}{2\pi} \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M_{1,ij}} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{M_{2,ij}} A_{ijkl} \frac{\Omega_{kl}}{2\pi} Q_{kl} + A_{out,ij} \bar{Q}_{ij} \quad (1)$$

Рассеянное в
атмосфере
излучение

Прямое излучение
от наблюдаемого
пикселя

Боковой подсвет от
пикселей снимка в
пределах радиуса
бокового подсвета

Боковой подсвет от
пикселей снимка вне
радиуса бокового
подсвета

$$Q_{ij} = r_{surf,ij} \left(\delta_{sun,ij} E_{0,nsc} - \frac{\Omega_{ij}}{2\pi} E_{0,sc} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{M_{3,ij}} \sum_{l=1}^{M_{4,ij}} C_{ijkl} \frac{\Omega_{kl}}{2\pi} r_{surf,kl} - C_{out,ij} \bar{r}_{surf,ij} + \frac{(\bar{r}_{surf,ij} \gamma_1)^2}{1 - \bar{r}_{surf,ij} \gamma_1} \right) \quad (2)$$

Суммарная
светимость
поверхности

Освещенность
земной
поверхности
нерассеянным
излучением

Освещенность
земной
поверхности
рассеянным
излучением

Дополнительная
освещенность земной
поверхности
однократно
отраженным
излучением в пределах
радиуса формирования
дополнительной
освещенности

Дополнительная
освещенность земной
поверхности
однократно
отраженным
излучением от пикселей
вне радиуса
формирования
дополнительной
освещенности

Дополнительная
освещенность
земной
поверхности
многократно
отраженным
излучением

Величины $I_{sun,ij}$, A_{ijkl} , $A_{out,ij}$, $E_{0,sc}$, C_{ijkl} , $C_{out,ij}$, γ_1 рассчитывались разработанными программами метода Монте-Карло.

Учитываемые факторы

1. Сферичность системы атмосфера – земная поверхность;
2. Многократное рассеяние в атмосфере;
3. Многократное отражение от земной поверхности;
4. Поляризация излучения;
5. Неоднородность земной поверхности при формировании бокового подсвета и дополнительной освещенности отраженным излучением;
6. Экранирование рельефом линии визирования и направления на Солнце;
7. Экранирование части телесного угла направлений на земной поверхности рельефом

Допущения

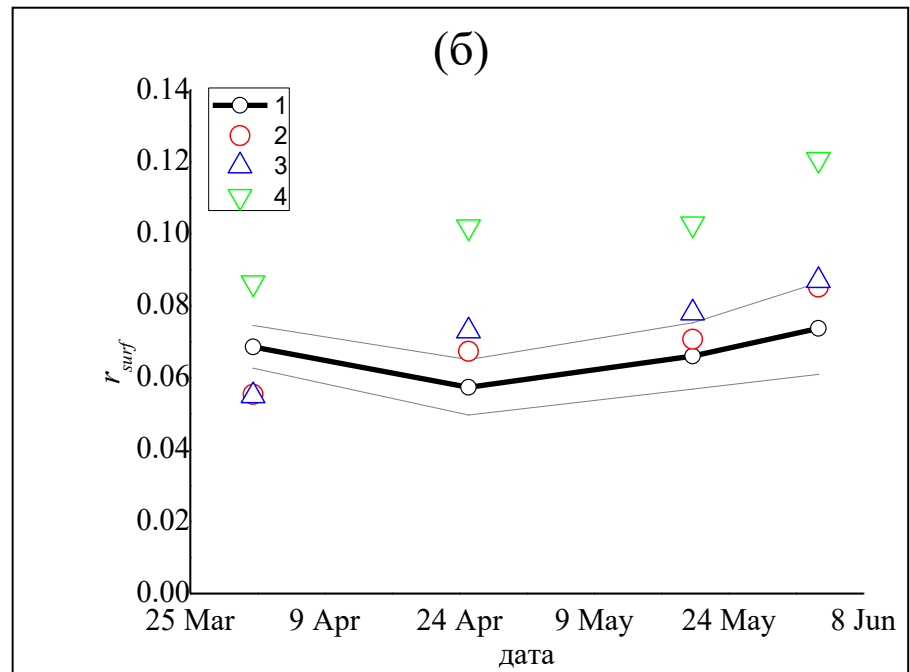
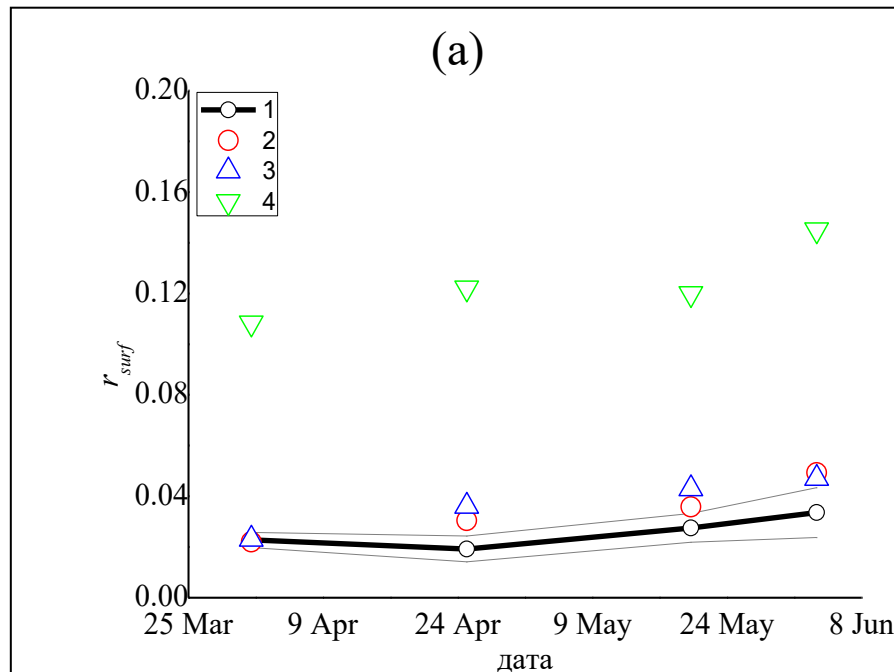
1. Рассматриваются безоблачные участки поверхности;
2. Отражение по закону Ламберта;
3. Модель атмосферы известна

Подходы для ускорения получения результатов

1. Изопланарные зоны;
2. Радиус формирования бокового подсвета;
3. Радиус формирования дополнительной освещенности земной поверхности;
4. Аппроксимационная формула для интенсивности излучения, не взаимодействовавшего с земной поверхностью

Валидация алгоритма по данным наземных измерений

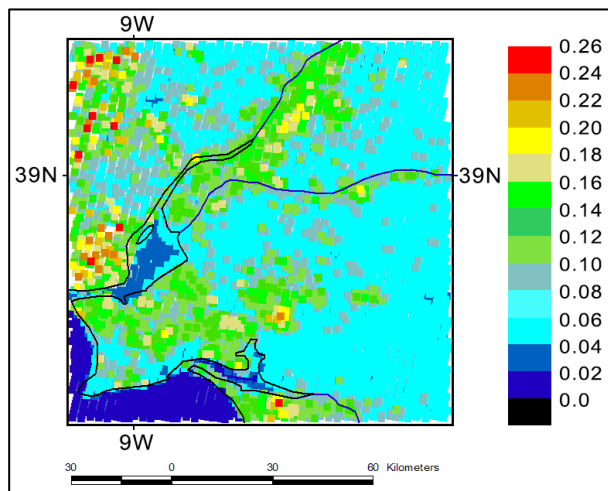
- Участок земной поверхности с координатами 38.4-39.4° с.ш., 8.25-9.25° з.д.
- Наземные измерения коэффициентов отражения из [1] тестовой точки с координатами 38.829° с.ш., 8.791° з.д. Даты измерений 01.04.2016 г., 25.04.2016 г., 20.05.2016 г., 03.06.2016 г.



Усредненные наземные измерения и результаты трех алгоритмов, полученных по данным AQUA. 1 – усредненные наземные измерения и их СКО (серым цветом); 2 - результаты предлагаемого алгоритма; 3 – результаты алгоритма MOD09; 4 – результаты алгоритма без атмосферной коррекции.

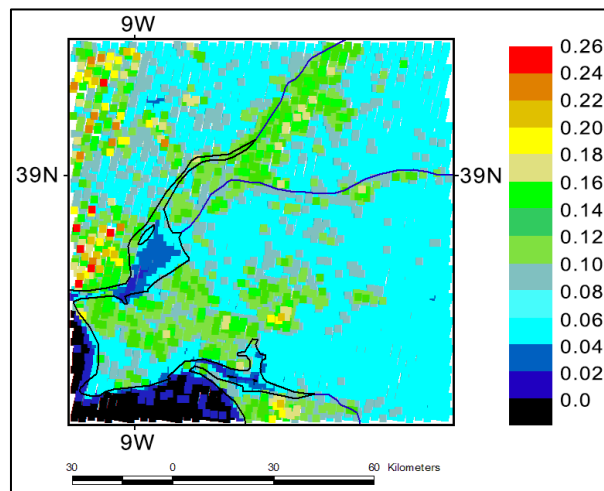
(a) канал MODIS №3; (б) канал MODIS №4

Предлагаемый алгоритм

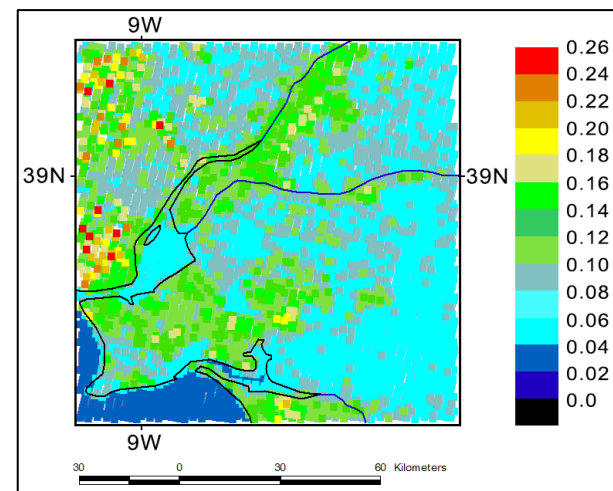


Алгоритм MOD09

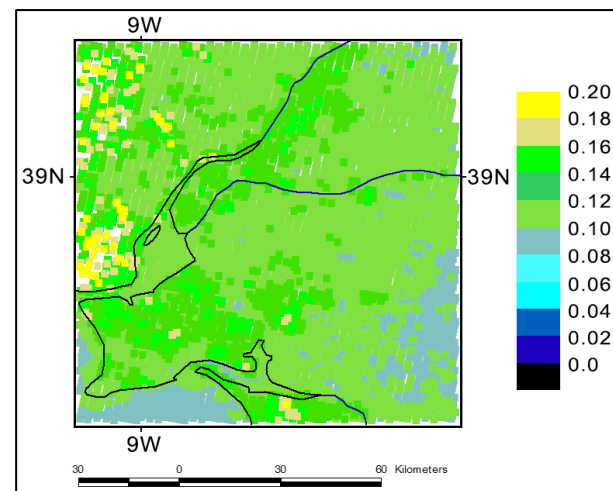
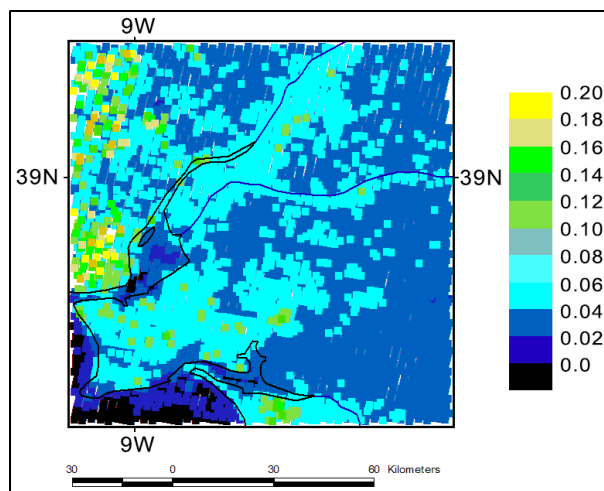
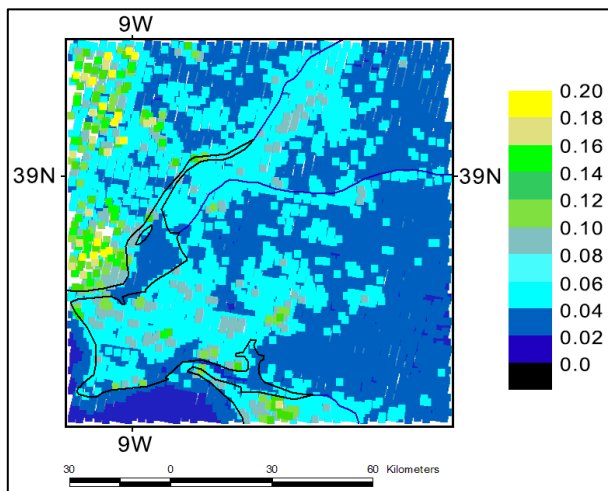
Канал №1 MODIS



Алгоритм без коррекции



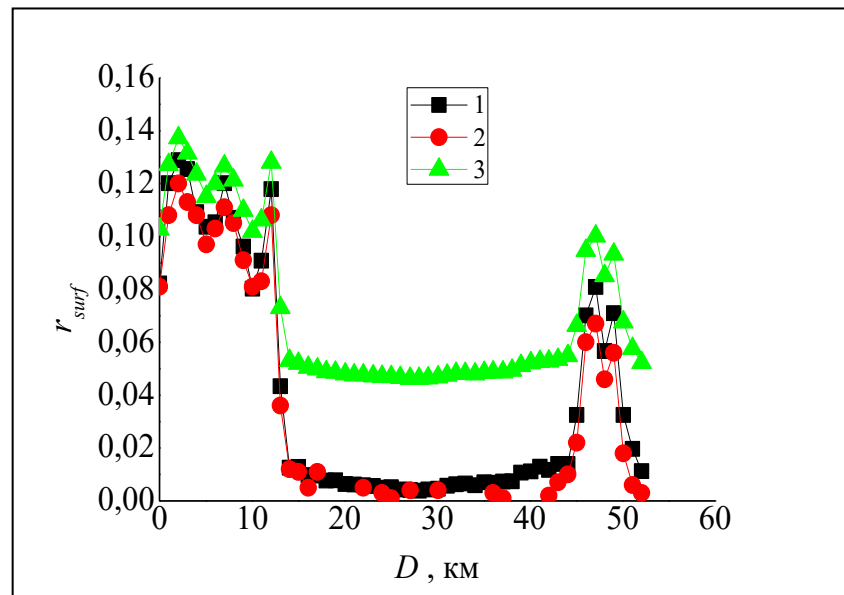
Канал №3 MODIS



Пример рассчитанных коэффициентов отражения измерения за 01.04.2016 г. спутник TERRA.

Tarasenkov M.V., Belov V.V., Engel M.V., Zimovaya A.V., Zonov M.N., Bogdanova A.S. Algorithm for the reconstruction of the ground surface reflectance in the visible and near IR ranges from MODIS satellite data with allowance for the influence of ground surface inhomogeneity on the adjacency effect and of multiple radiation reflection // Remote sensing. 2023, 15(10), 2655.

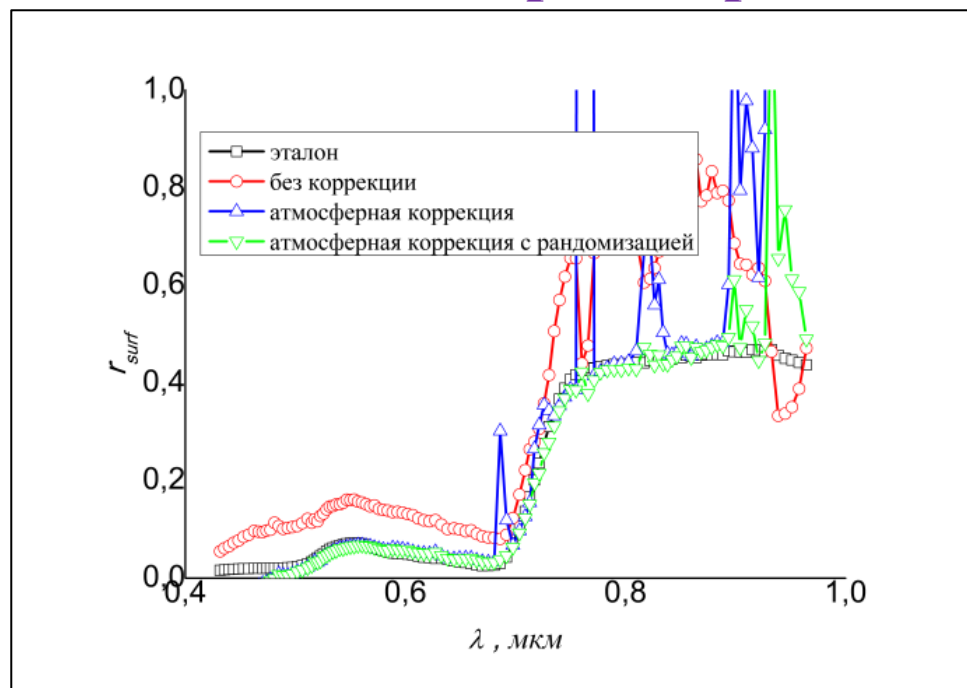
<https://doi.org/10.3390/rs15102655>.



r_{surf} для ряда №879 снимка TERRA за 01.04.2016 г. от пикселя 38.351° с.ш., 8.660° з.д. до пикселя 38.438° с.ш., 9.247° з.д. D – расстояние до пикселя 38.351° с.ш., 8.660° з.д. 1 – предлагаемый алгоритм, 2 – алгоритм MOD09, 3 – без атмосферной коррекции. канал №4 MODIS ($\lambda=0.545 - 0.565$ мкм).

- Для каналов №1, 3 и 4 MODIS отличие результатов предлагаемого алгоритма от наземных измерений лежит в диапазоне от -0.023 до 0.023 , а для алгоритма MOD09 – в диапазоне от -0.014 до 0.024 . Для канала №2 для всех рассмотренных дней кроме 01.04.2016 г. это отличие лежит в диапазоне от -0.064 до 0.067 для предлагаемого алгоритма и от -0.059 до 0.044 для алгоритма MOD09.
- Для участков водных поверхностей алгоритм MOD09 дает для большинства рассмотренных пикселей нулевые и отрицательные значения коэффициентов отражения. В это время предлагаемый алгоритм дает либо гораздо меньше отрицательных результатов, либо дает только положительные значения.

2. Восстановление коэффициентов отражения земной поверхности по данным гиперспектральных измерений

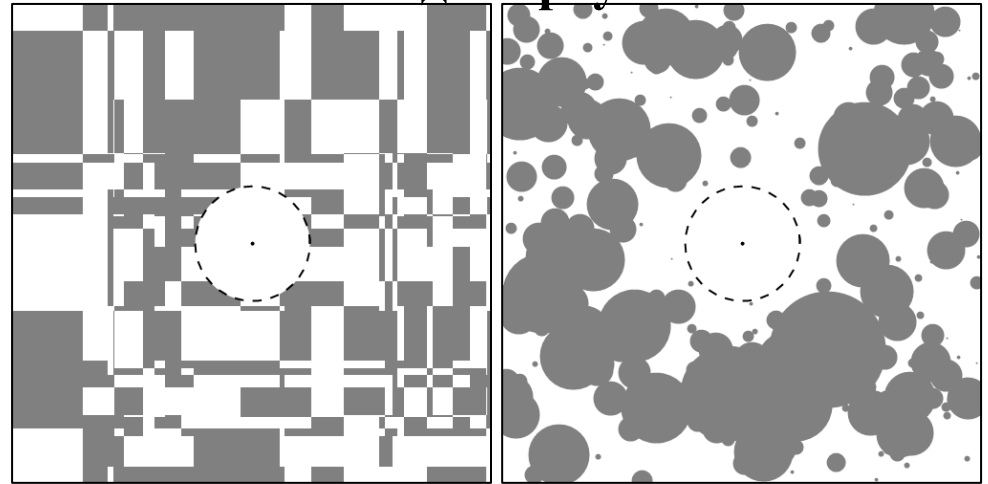


Наземные измерения r_{surf} и полученные тремя алгоритмами: 1) алгоритм без атмосферной коррекции, 2) для средних по каналу прибора оптических коэффициентов и 3) с рандомизацией по длинам волн. Дата измерений 04.07.2017 г.

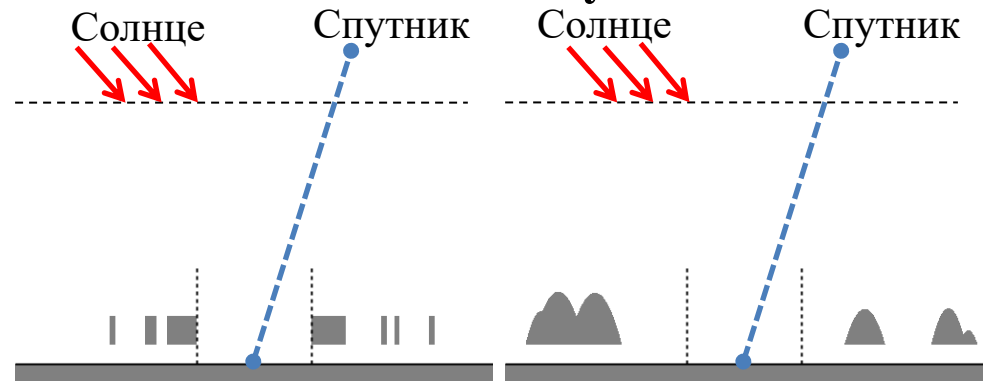
Вывод: алгоритм атмосферной коррекции спутниковых изображений с рандомизацией по длинам волн позволяет восстанавливать r_{surf} при $AOT_{0.55} \leq 0.27$ для однородных покрытых зеленой растительностью поверхностей с погрешностью не превышающей 0.05 для каналов гиперспектрального спутникового прибора в диапазонах длин волн $\lambda=0.502-0.726$, $0.740-0.760$ и $0.772-0.893$ мкм.

3. Влияние облачного поля на результат восстановления коэффициентов отражения земной поверхности

Вид сверху:



Вид сбоку:



Геометрическая схема рассматриваемого облачного поля

Постановка задачи:

Пусть из спутниковых измерений известны оптические параметры атмосферы, в том числе облачности. Требуется найти расстояние от облачного поля, на котором с погрешностью в 0.005 можно восстанавливать коэффициент отражения земной поверхности в приближении безоблачной атмосферы

1. Каргин Б.А., Пригарин С.М. Имитационное моделирование кучевой облачности для исследования процессов переноса солнечной радиации в атмосфере методом Монте-Карло // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 09. С. 1275-1287.

2. Titov G.A., Zhuravleva T.B., Zuev V.E. Mean radiation fluxes in the near-IR spectral range: Algorithms for calculation // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. 1997. V. 102. P. 1819–1832.

Этапы алгоритма:

1. Расчет интенсивности принимаемого излучения в просвет в разорванном облачном поле $I_{sum,cloud}(R)$ для широкого набора исходных параметров.
2. Расчет приближенного значения коэффициента отражения r_{surf} в допущении о безоблачности атмосферы.
3. Оценка влияния облачного поля Δr_{surf} .

$$\Delta r_{surf} = |r_{surf} - \widetilde{r_{surf}}(R_*)| \leq \delta = 0.005 \quad (3)$$

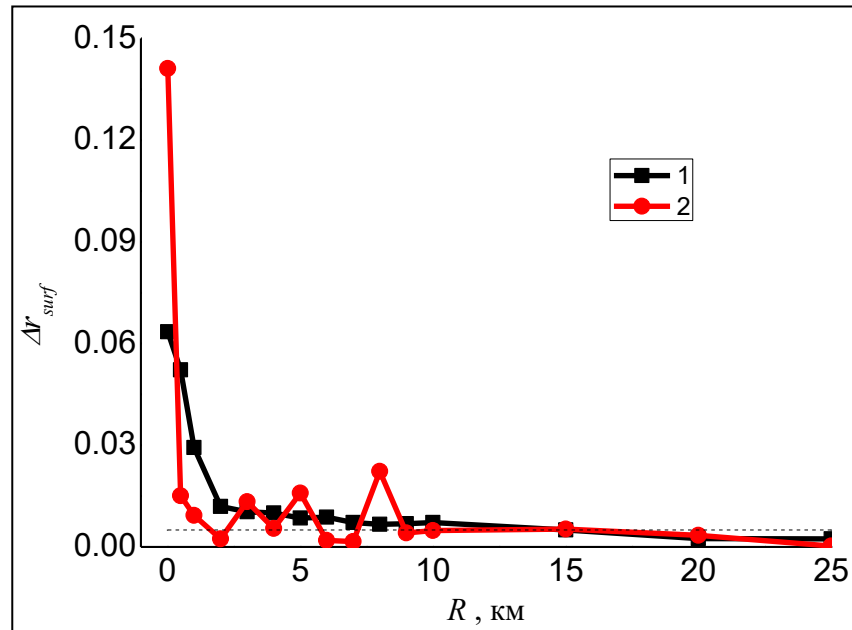
где r_{surf} - точное значение коэффициента отражения; $\widetilde{r_{surf}}$ - приближенное значение коэффициента отражения

4. Интерполяционная формула для оценки радиуса облачного бокового подсвета:

$$\begin{aligned} R_* = & C_0 + C_1 \Delta h + C_2 \delta_{cl} + C_3 (1 - \mu_{sun}) + C_4 (1 - \mu_d) + C_5 r_{surf} + C_6 \exp(-\tau) + C_7 \sigma_{cl} \\ & + C_{1,2} \Delta h \delta_{cl} + \dots + C_{6,7} \exp(-\tau) \sigma_{cl} + C_{1,2,3} \Delta h \delta (1 - \mu_{sun}) + \dots \\ & + C_{5,6,7} r_{surf} \exp(-\tau) \sigma_{cl} + \dots \\ & + C_{1,2,3,4,5,6,7} \Delta h \delta_{cl} (1 - \mu_{sun}) (1 - \mu_d) r_{surf} \exp(-\tau) \sigma_{cl} \end{aligned} \quad (4)$$

где $C_0, \dots, C_{1,2,3,4,5,6,7}$ - константы аппроксимации; Δh - толщина облачного слоя; δ_{cl} - балл облачности; μ_{sun}, μ_d - косинусы зенитных углов Солнца и оптической оси приемной системы; r_{surf} - коэффициент отражения земной поверхности; τ - аэрозольная оптическая толщина слоя безоблачной атмосферы; σ_{cl} - коэффициент ослабления облачности.

Обоснование алгоритма



Зависимость Δr_{surf} от радиуса просвета R для тестовой ситуации. 1 – среднее по реализациям облачного поля; 2 – фиксированные случайные реализации.

Вывод: радиус влияния бокового подсвета от облачности R_* на восстанавливаемые коэффициент отражения r_{surf} слабо зависит от расположения облачности. Поэтому можно использовать средний радиус R_* по реализациям облачного поля.

Альтернативные подходы

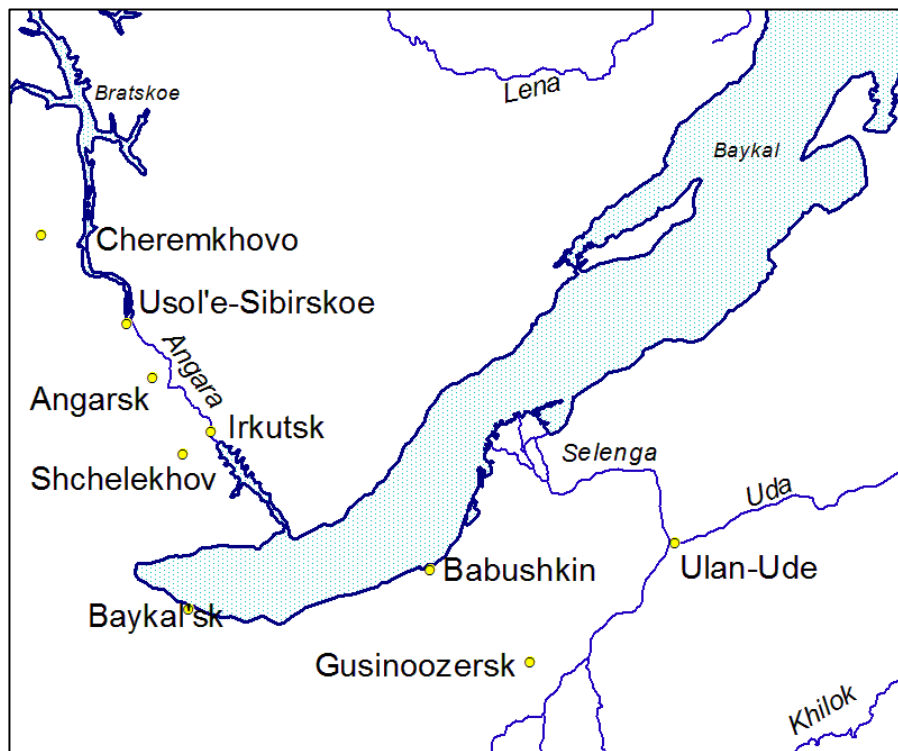
Боковой подсвет от облачности способен существенно изменить принимаемое излучение. В работах [1-4] и др. исследуется влияние бокового подсвета от облачности на принимаемое спутником излучение:

1. модель одиночного облака [1];
2. модель однородного разорванного облачного поля [2];
3. модель заданного детерминированного облачного поля [3];
4. статистический анализ данных [4].

Расстояние, на котором принимаемое излучение в безоблачном случае мало отличается от принимаемого излучения при наличии облачного поля, в первом приближении можно использовать как оценку радиуса бокового подсвета от облачности.

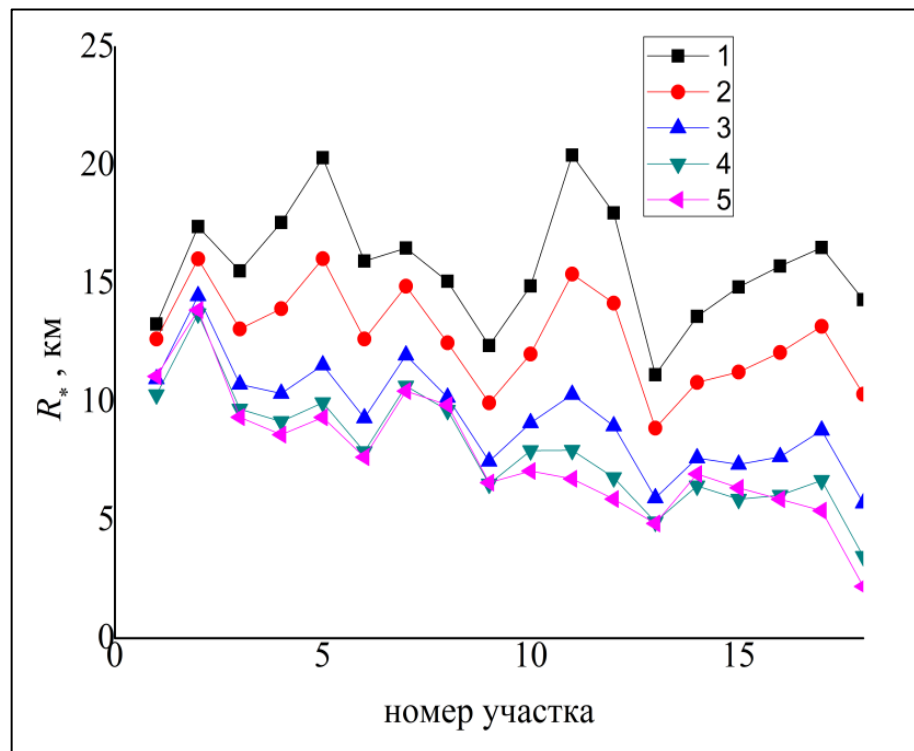
-
1. Cahalan R.F., Oreopoulos L., Wen G. et al. // Remote Sens. Environ. 2002, 78, 83–98.
 2. Marshak A., Evans K.F., Varnai T., Wen G. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2014, 147, 79–85.
 3. Wen G., Marshak A., Cahalan R.F. et al. // J. Geophys. Res. 2007, 112, D13204.
 4. Varnai T., Marshak A. // Geophys. Res. Lett. 2009, 36, L06807.

Использование алгоритма



Рассматриваемый участок Прибайкалья с координатами 51 - 54° с.ш., 103 - 109° в.д.

Период времени с 01.07.2021 г. по 23.07.2021 г.



Средний по снимкам радиус влияния облачности R_* для 18 участков после удаления ситуаций с облачностью верхнего яруса. 1 – канал №8 MODIS, 2 – канал №3, 3 – канал №4, 4 – канал №1, 5 – канал №2

Вывод: среднее значение радиуса бокового подсвета от облачности R_* равно 15.8 км для канала №8 ($\lambda=0.405 - 0.420$ мкм), 12.9 км для канала №3 ($\lambda=0.459 - 0.479$ мкм), 9.5 км для канала №4 ($\lambda=0.545 - 0.565$ мкм), 8.2 км для канала №1 ($\lambda=0.620 - 0.670$ мкм) и 7.9 км для канала №2 ($\lambda=0.841 - 0.876$ мкм).

Аппроксимационная формула:

$$R_* = A\delta_{cl}\sigma_{cl}\Delta h + Br_{surf}\delta_{cl}\sigma_{cl}\Delta h \quad (5)$$

где Δh - толщина облачного слоя; δ_{cl} - балл облачности; r_{surf} - коэффициент отражения земной поверхности; σ_{cl} - коэффициент ослабления облачности; А, В – константы аппроксимации.

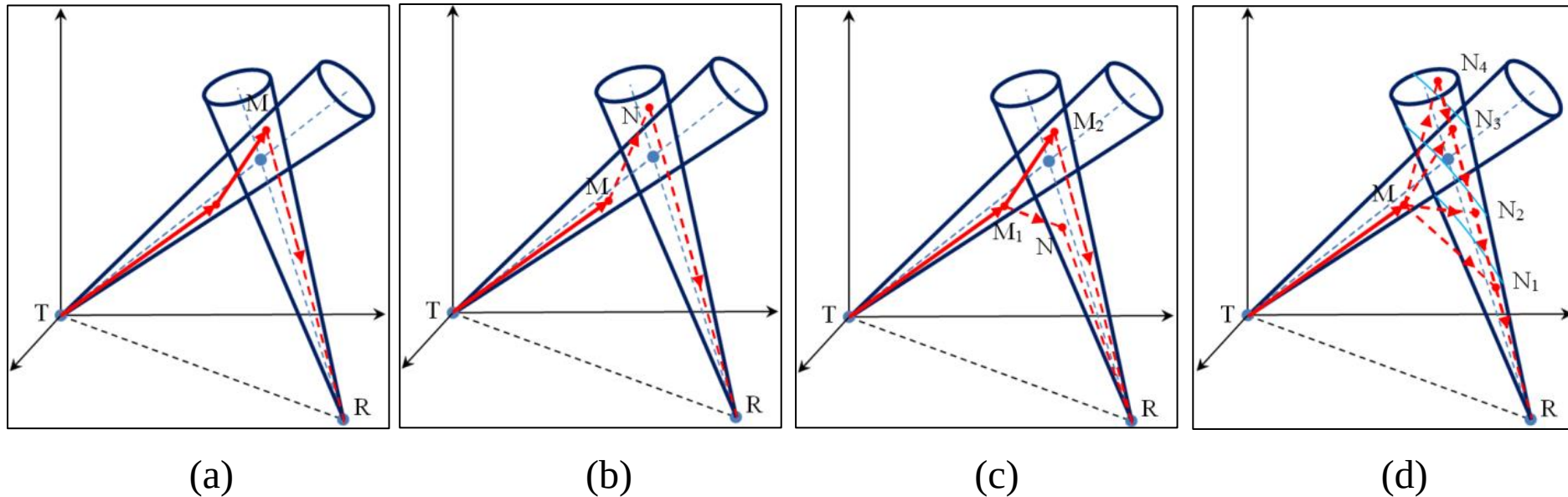
Значения констант аппроксимации формулы (9) и средние абсолютные погрешности аппроксимации ΔR_{aver} для рассматриваемых каналов.

Канал.	А , км	В , км	ΔR_{aver} , км
8, $\lambda = 0.405 - 0.420$ мкм	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0	6.5
3, $\lambda = 0.459 - 0.479$ мкм	$2.62 \cdot 10^{-2}$	0	4.5
4, $\lambda = 0.545 - 0.565$ мкм	$2.20 \cdot 10^{-2}$	$3.85 \cdot 10^{-4}$	2.9
1, $\lambda = 0.620 - 0.670$ мкм	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-2}$	2.6
2, $\lambda = 0.841 - 0.876$ мкм	$7.02 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-2}$	2.0

2. Tarasenkova M.V., Engel M.V., Zonov M.N., Belov V.V. Assessing the cloud adjacency effect on retrieval of the ground surface reflectance from MODIS satellite data for the Baikal area // Atmosphere. 2022, V.13, №12. 2054. 16p. <https://doi.org/10.3390/atmos13122054>.

4. Оценка качества канала атмосферной оптической связи на рассеянном излучении в УФ-диапазоне длин волн

Алгоритмы статистического моделирования импульсной реакции канала оптической связи на рассеянном излучении



(a) Алгоритм с локальными оценками в точках столкновения [1]

(b) Алгоритм с двойными локальными оценками в точках столкновения [1,2]

(c) Алгоритм с комбинированными оценками в точках столкновения [3]

(d) Алгоритм с модифицированной двойной локальной оценкой в точках столкновения в каждый временной интервал, для которого выполняется расчет

1. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1976. 282 с.

2. Каблукова Е.Г., Каргин Б.А. // Вычислит. технол. 2012. Т. 17, № 3. С. 70–82.

3. Lotova G.Z. // Rus. J. Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. V. 26, N. 5, P. 491-500.

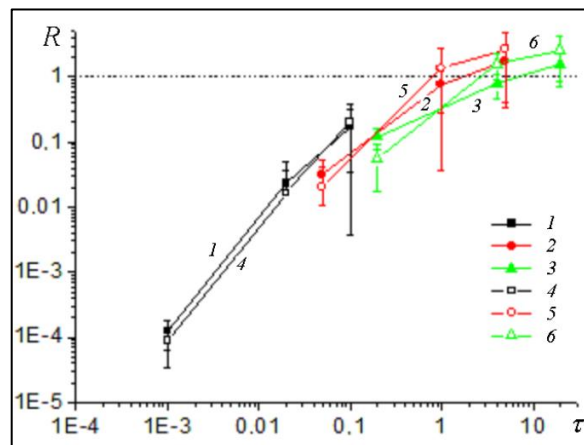
6. Двойная локальная оценка в каждый возможный временной интервал:

$$I_{i,j,k} = q_k 2\pi(1 - \cos v_d) \left(\frac{P_i}{1 - e_i b} - \frac{P_{i-1}}{1 - e_{i-1} b} \right) \frac{\sigma_{s,a}(\mathbf{r}_k) g_a(\mathbf{r}_k, \cos \gamma_{ki}) + \sigma_{s,m}(\mathbf{r}_k) g_m(\mathbf{r}_k, \cos \gamma_{ki})}{2\pi(\sigma_{t,a}(\mathbf{r}_k) + \sigma_{t,m}(\mathbf{r}_k))(l_{MN_i})^2} \quad (6)$$

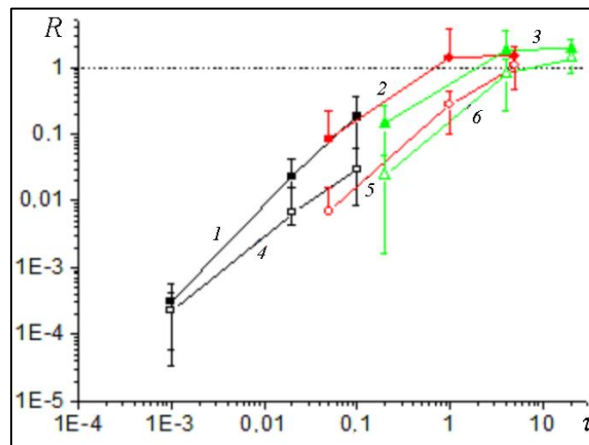
$$\times \frac{\sigma_{s,a}(\mathbf{r}_{1,ki}) g_a(\mathbf{r}_{1,ki}, \cos \gamma_{1,ki}) + \sigma_{s,m}(\mathbf{r}_{1,ki}) g_m(\mathbf{r}_{1,ki}, \cos \gamma_{1,ki})}{2\pi} \cdot \exp(-\tau_{1,ki}) \exp(-\tau_{2,ki})$$

где q_k – “вес фотона” в точке столкновения M ; v_d – угол поля зрения приемной системы; $\mathbf{r}_k$ – радиус вектор точки M ; $\mathbf{r}_{1,ki}$ – радиус-вектор промежуточной точки N_i ; $\sigma_{s,a}$, $\sigma_{s,m}$ – коэффициенты аэрозольного и молекулярного рассеяния; $\sigma_{t,a}$, $\sigma_{t,m}$ – коэффициенты аэрозольного и молекулярного ослабления; g_a , g_m – индикатрисы аэрозольного и молекулярного рассеяния; P_i , e_i – параметры эллипсоида вращения; l_{MN_i} – расстояние от точки M до точки N_i ; γ_{ki} – углы рассеяния от направления фотонной траектории до столкновения к направлениям MN_i ; $\gamma_{1,ki}$ – углы рассеяния от направлений MN_i к направлениям $N_i D$; b – вторая координата случайного направления (a, b, c) в подвижной системе координат; $\tau_{1,ki}$ – оптическая толщина от точки M до точки N_i ; $\tau_{2,ki}$ – оптическая толщина от точки N_i до точки приемной системы D .

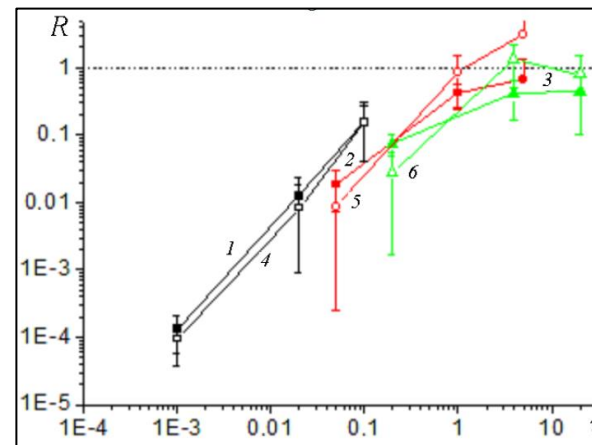
Сравнение трудоемкостей алгоритмов моделирования импульсной реакции



(a)



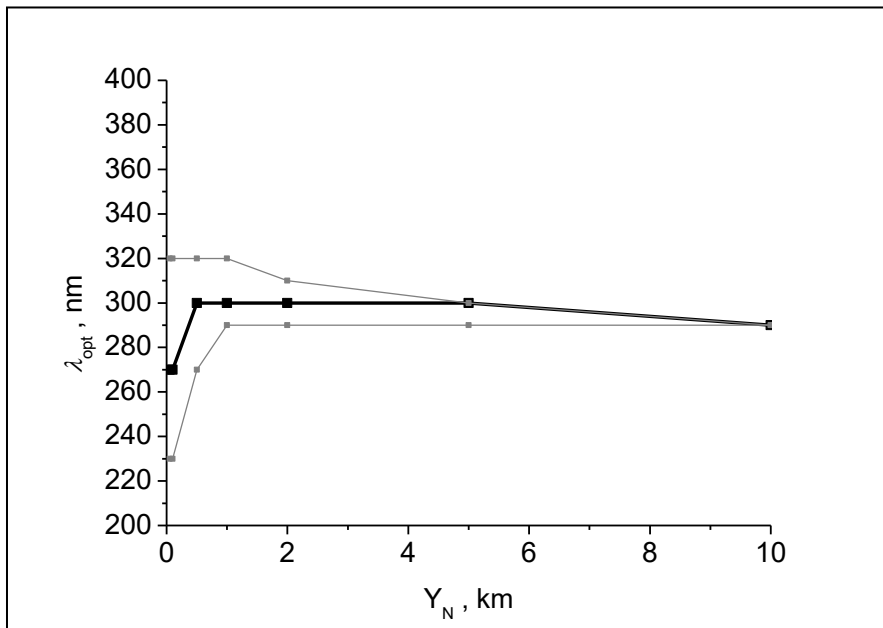
(b)



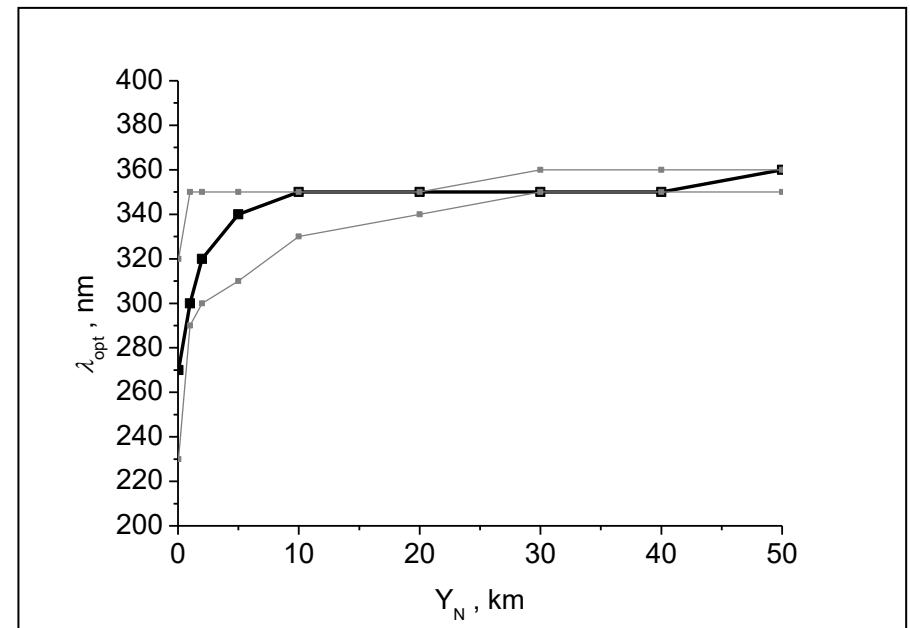
(c)

Зависимость отношения трудоемкостей R от оптической толщины линии связи τ_{SID} при фиксированных значениях коэффициента ослабления однородной среды. (a) – индикатриса Релея $\kappa=1$, (b) - индикатриса Хеньи-Гринштейна $\kappa=1$, (c) – индикатриса Релея $\kappa=0.5$. 1 - R_{13} при $\sigma_t=0.01 \text{ км}^{-1}$, 2 – R_{13} при $\sigma_t=0.5 \text{ км}^{-1}$, 3 – R_{13} при $\sigma_t=2 \text{ км}^{-1}$, 4 - R_{23} при $\sigma_t=0.01 \text{ км}^{-1}$, 5 – R_{23} при $\sigma_t=0.5 \text{ км}^{-1}$, 6 – R_{23} при $\sigma_t=2 \text{ км}^{-1}$

Вывод: алгоритм модифицированной двойной локальной оценки моделирования импульсной реакции канала оптической связи на рассеянном излучении позволяет получать результат с одинаковой погрешностью с алгоритмами двойной локальной и комбинированной оценки за время меньшее в 1.5-10000 раз при оптической толщине линии связи $\tau_{SID} < 0.5$.



(a)

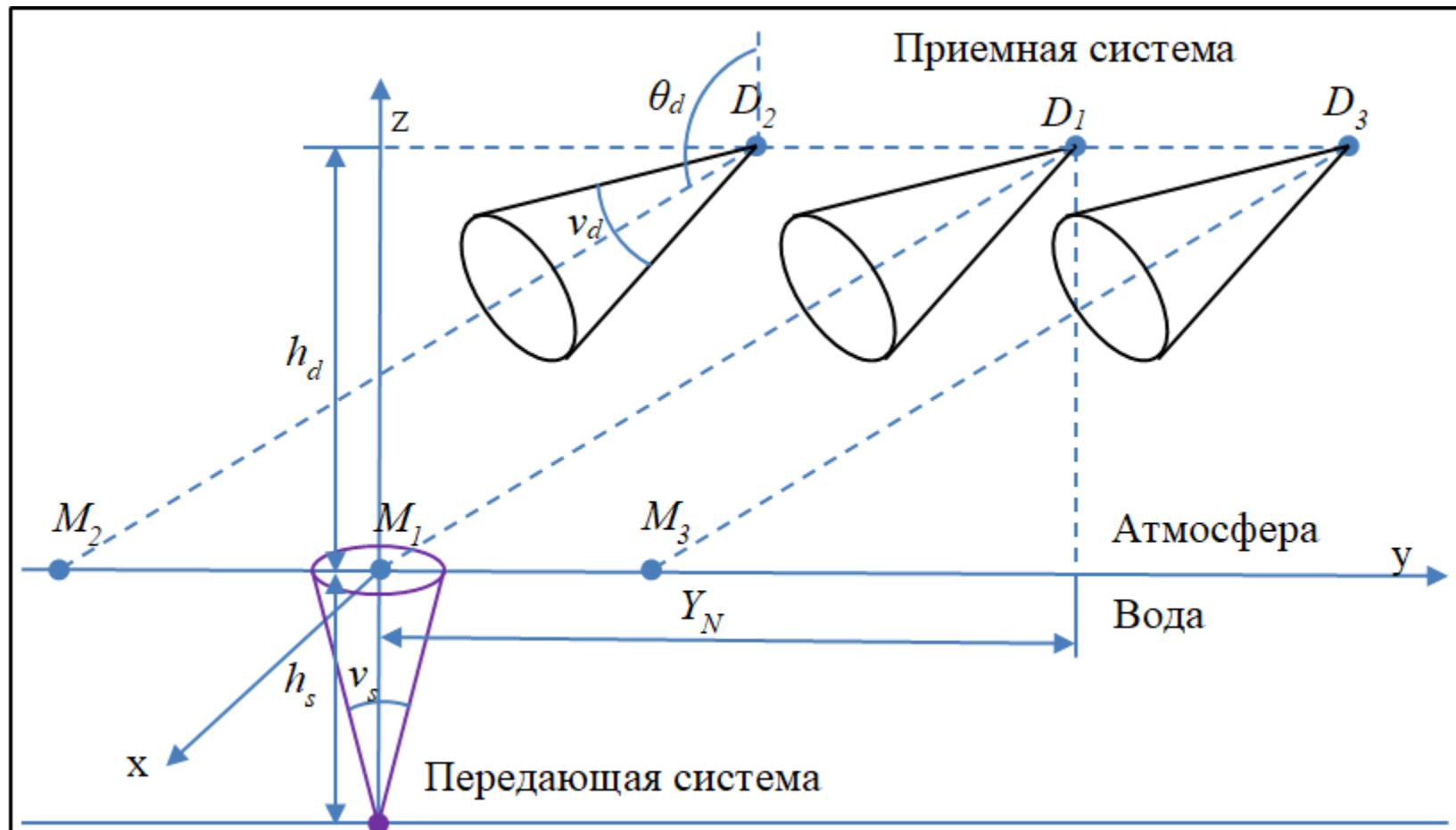


(б)

Оптимальная длина волны по значению SNR в зависимости от базового расстояния Y_N
 (а) модель $S_M=10$ км день; (б) модель $S_M=10$ км ночь

Вывод: для организации оптической связи вне прямой видимости в УФ-диапазоне при метеорологической дальности видимости $S_M \geq 10$ км для дневных условий при базовых расстояниях от 500 м до 10 км оптимальной длиной волны по отношению сигнал/шум является длина волны $\lambda=0.29$ мкм. Для ночных условий и базовых расстояний от 2 км до 50 км оптимальна длина волны $\lambda=0.35$ мкм

5. Возможности лазерной оптической связи на рассеянном излучении через границу раздела вода- атмосфера

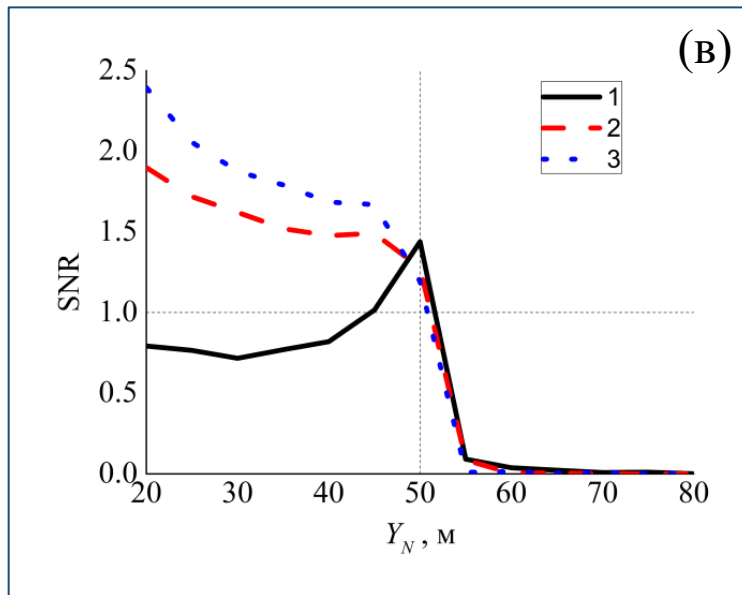
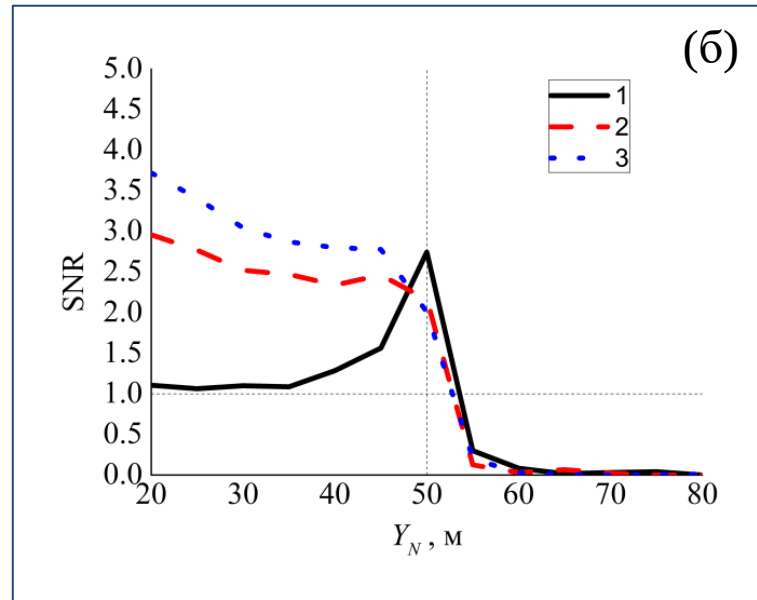
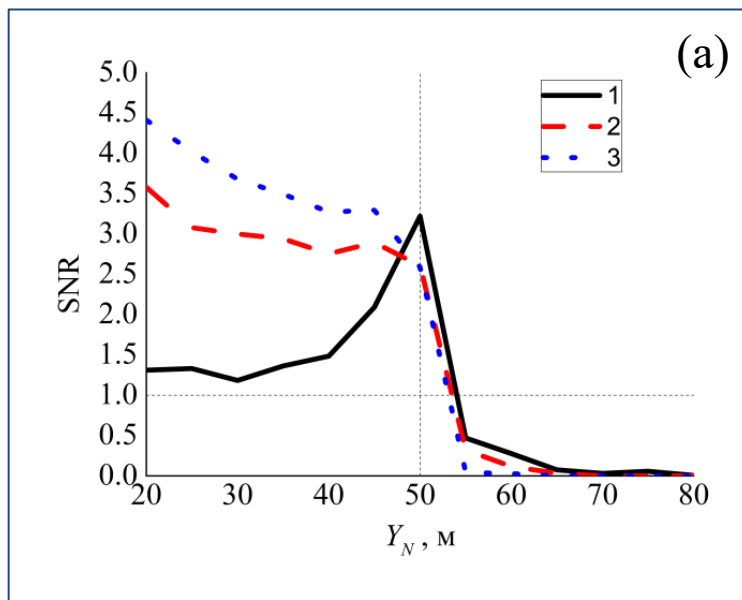


Геометрическая схема постановки задачи

Альтернативные подходы

- В [1] реализована подводная оптическая связь на длине волны 532 нм с ретрансляционным буюм и атмосферная связь с БПЛА на длине волны 1550 нм после ретрансляции сигнала буюм. Протяженность канала связи составляет 18 м под водой и 1200 м в атмосфере.
- В [2] рассматривается система связи в прямой видимости подводного беспилотника с каскадом расположенных последовательно передающих систем на базовом расстоянии в 5 м от оси расположения каскада.
- В [3] рассматривается прототип системы подводной оптической связи в прямой видимости на длине волны 470 нм и базовых расстояниях до 9 м.
- В [4] рассматривается система оптической связи в прямой видимости через границу раздела вода-атмосфера на базовом расстоянии до 10 м на длине волны 450 нм и скорости передачи информации до 850 Мбит/с.
- В [5] создана дуплексная система оптической связи в прямой видимости через границу раздела вода – атмосфера между подводным беспилотником и БПЛА на длине волны 850 нм при глубине погружения подводного беспилотника в 1.2 м, высоте полета БПЛА в 10 м со скоростью передачи информации в 73 Мбит/сек.

-
1. Ghanbari M., Ataee M. and Sajad Sadough S.M., Outage Performance Analysis for UAV-Based Mixed Underwater-FSO Communication Under Pointing Errors // 2022 4th West Asian Symposium on Optical and Millimeter-wave Wireless Communications (WASOWC), Tabriz, Iran, 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/WASOWC54657.2022.9798419.
 2. Yasui Y., Shigenawa A., Nakayama Y.. Drone-based Underwater Sensor Network with Optical Camera Communication // 2023 IEEE 97th Vehicular Technology Conference. 2023. P. 1-5. doi: 10.1109/vtc2023-spring57618.2023.10199717.
 3. Широков И. Б. , Головин В. В. , Редькина Е. А. и др. Разработки в области подводной беспроводной оптической связи и с помощью малогабаритных магнитных антенн / // Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии. 2024. Т. 7, № 1. С. 93-105.
 4. Sun X. et al. Field Demonstrations of Wide-Beam Optical Communications Through Water–Air Interface // IEEE Access. vol. 8, pp. 160480-160489, 2020. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3020878.
 5. Kodama Takahiro, Kariya Ayumu, Kuwahara Kiichiro et. al. Real-time full-duplex transmission experiment for air and underwater invisible light communication system// Optics Continuum. 2024. Vol. 3, No. 11. P. 2260-2271. 10.1364/opticaopen.26142865



SNR как функция базового расстояния Y_N при $h_s=1$ м, $h_d=50$ м, $S_M=50$ км, $\theta_d=135^\circ$. Расчеты выполнялись методом Монте-Карло.

(а) Длина волны $\lambda=450$ нм; (б) 510 и
(в) 590 нм.

1 – $z_\theta=3$ м; 2 – $z_\theta=10$ м; 3 – $z_\theta=20$ м.

В период с 2008 по настоящее время опубликовано более 196 научных работ (из них 114 в ядре РИНЦ), из них 52 статьи в рецензируемых изданиях, главы в 2 монографиях, 6 свидетельств о регистрации программ и 2 патента на полезную модель.

Индекс Хирша 14 (по ядру РИНЦ), 9 (по WOS) и 11 (по Scopus).

Под научным руководством защищено 2 кандидата наук:

1. Шестерикова (Зимовая) А.В. – к.ф.-м.н., 2020 г.
2. Познахарев Е.С. – к.т.н., 2024 г.

Награды:

- 1) медаль им. К.Э. Циолковского Федерации Космонавтики России, 2014 г.;
- 2) Почетная грамота Президиума Сибирского отделения РАН, 2018 г.;
- 3) Премия Томской области в сфере образования, науки, здравоохранения и культуры 2024 г.

Являюсь ответственным исполнителем работ по проекту государственного задания ИОА СО РАН № FWRU-2021-0002 (2021–2025 гг.).

Являлся руководителем работ:

1. РФФ №22-22-00830 (2022–2023 гг.),
 2. РФФИ № 16-31-00033 мол_a (2016–2017 гг.);
- зам. научного руководителя СЧ НИР «Оператор ДЗЗ-ИОА» (2017–2018 гг.)

Был исполнителем в грантах:

1. РФФИ №15-07-06811 А (2016–2017 гг.),
2. №075-15-2020-787 «Фундаментальные основы, методы и технологии цифрового мониторинга и прогнозирования экологической обстановки Байкальской природной территории» (2020–2022 гг.),
3. Проект «Реализация мероприятий и выполнение работ по дооснащению Центра коллективного пользования научным оборудованием “Атмосфера”» по соглашению с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2021-661 (2021–2023 гг.).

Являлся руководителем или ответственным исполнителем работ в рамках 4 хоздоговоров с российскими заказчиками и выступал в качестве исполнителя в 6 хоздоговорах с российскими заказчиками.

Практическая ценность полученных результатов подтверждается созданным программным обеспечением, переданным АО «Российские космические системы», а разработанные алгоритмы метода Монте-Карло использовались в ФАУ «ГНИИИ ПТЗИ ФСТЭК России» при подготовке 5 методических документов.

Спасибо за внимание!

- **Критерий определения радиуса области формирования бокового подсвета**

Поставим условие, что радиус формирования бокового подсвета необходимо задать, так, чтобы было выполнено:

$$1 \geq \min_{ij} \frac{Q_{ij}}{\tilde{Q}_{ij}} \geq \delta_1 \quad (7)$$

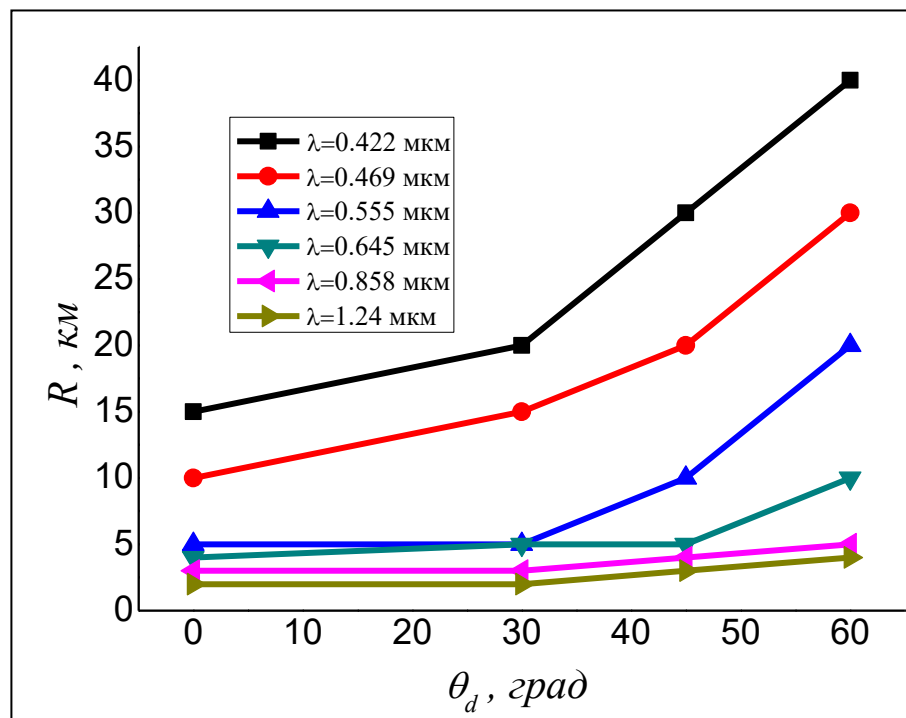
где Q_{ij} - точное значение светимости пикселя i -го ряда j -го столбца снимка; $\tilde{Q}_{ij}$ - приближенное значение светимости при использовании радиуса области формирования бокового подсвета; δ_1 - минимальное отношение точного и приближенного значения светимости ($\delta_1=0.95$)

Показано, что любых поверхностей для выполнения (7) радиус области формирования бокового подсвета достаточно задавать условием:

$$k_1(R_k) \equiv \frac{\iint_{S(R_k)} h(\rho_w, \alpha_w, \mu_k) dS}{\iint_S h(\rho_w, \alpha_w, \mu_k) dS} \geq \delta_1 + (\delta_1 - 1) \frac{\frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k))}{\iint_S h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS} \quad (8)$$

где h - ФРТ канала формирования бокового подсвета; ρ_w, α_w - полярные координаты на земной поверхности; μ_k - косинус угла отклонения оси приемной системы от направления в нади́р для границы k -й изопланарной зоны; τ - оптическая длина трассы от центра наблюдаемого пикселя до приемной системы.

Для 6 каналов MODIS в видимом и ближнем ИК-диапазоне были рассчитаны радиусы бокового подсвета R_k , при которых выполняется условие (8) при $\delta_1=0.95$.



Оценка сверху радиуса бокового подсвета

- **Критерий задания области формирования дополнительной освещенности**

Зададим радиус формирования дополнительной освещенности земной поверхности таким, чтобы было выполнено условие:

$$1 \geq \min_{i,j} \frac{r_{surf,ij}}{\tilde{r}_{surf,ij}} \geq \delta_2 \quad (9)$$

где $r_{surf,ij}$ - точное значение коэффициента отражения для пикселя i -го ряда j -го столбца снимка; $\tilde{r}_{surf,ij}$ - приближенное значение коэффициента отражения при использовании радиуса формирования дополнительной освещенности однократно отраженным излучением; δ_2 - минимальное отношение точного и приближенного значения коэффициента отражения, создаваемое использованием радиуса формирования дополнительной освещенности земной поверхности ($\delta_2=0.95$).

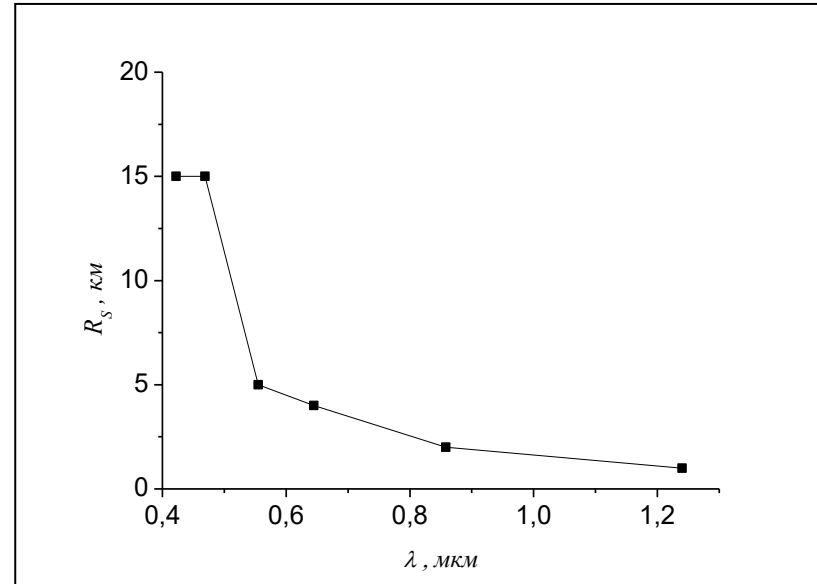
Показано, что для выполнения (9) достаточно выполнения условия:

$$k_2(R_S) \equiv \frac{\tilde{\gamma}_1(R_S)}{\gamma_1} \geq \frac{\delta_2}{\gamma_1} \left(\frac{\delta_2}{1 - \gamma_1} - 1 \right) \quad (10)$$

$$\tilde{\gamma}_1(R_S) \equiv 2\pi \int_0^{R_S} h_1(\rho_w) d\rho_w$$

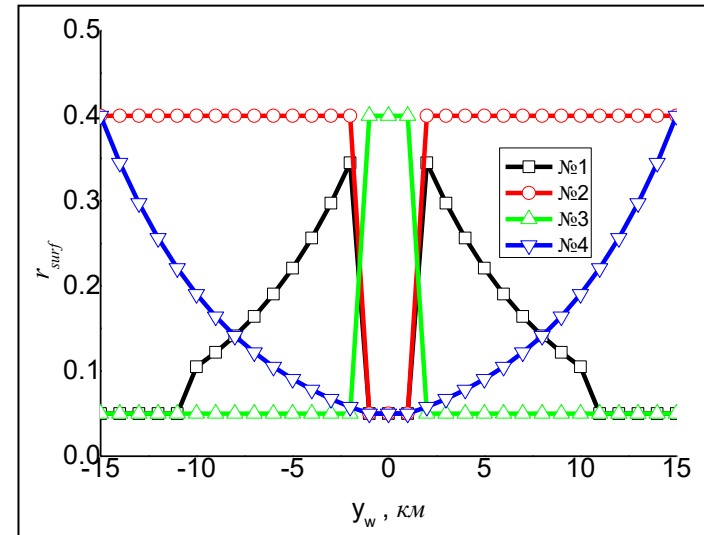
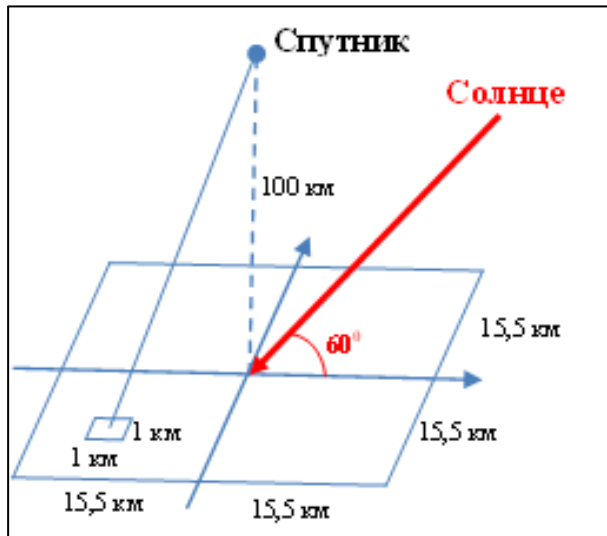
где h_1 - ФРТ канала формирования дополнительной освещенности земной поверхности однократно отраженным излучением.

Для 6 каналов MODIS были рассчитаны радиусы формирования дополнительной освещенности R_S , при которых выполняется (10) при $\delta_2=0.95$.



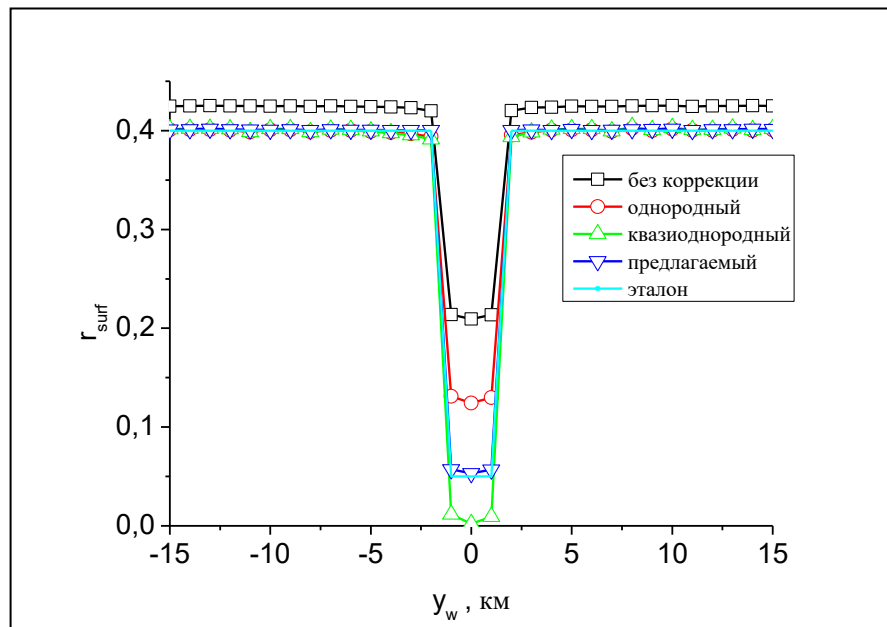
Оценка сверху радиуса формирования
дополнительной освещенности R_S

- **Методическая погрешность предлагаемого алгоритма**

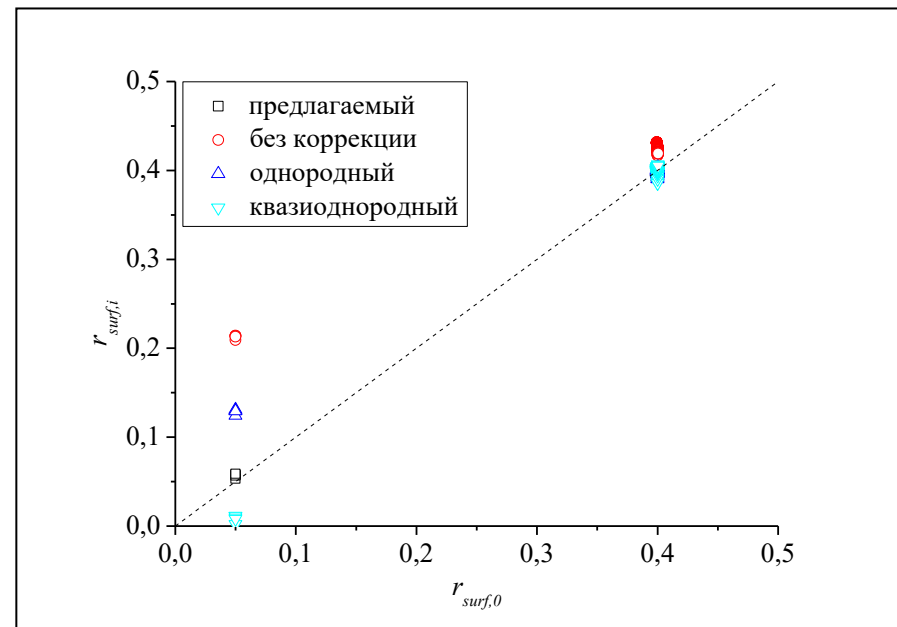


Рассматривалось 4 алгоритма:

- 1) Алгоритм без атмосферной коррекции.
- 2) Алгоритм однородной коррекции – алгоритм, в котором коррекция выполняется независимо для каждого пикселя в предположении, что поверхность однородная.
- 3) Алгоритм квазиоднородной коррекции – алгоритм, в котором коррекция выполняется в предположении, что наблюдаемый пиксель имеет один коэффициент отражения, а остальная поверхность другой, полученный из приближения однородной поверхности.
- 4) Предлагаемый алгоритм.



(a)



(б)

(a) Результаты восстановления r_{surf} при $x_w=0$ км для $\lambda=0.41$ мкм, полученные с помощью 4 алгоритмов для тест-объекта №2

(б) Соответствие исходных коэффициентов отражения $r_{surf,0}$ и полученных с помощью 4 алгоритмов $r_{surf,i}$ для $\lambda=0.41$ мкм тест-объекта №2

Абсолютное отличие результатов от эталона для центральной точки тест-объекта №2

λ , мкм	Предлагаемый	Без коррекции	Однородная	Квазиоднородная
0.42	0.003	0.159	0.074	0.048
0.47	0.021	0.116	0.057	0.040
0.55	0.016	0.066	0.037	0.029
0.65	0.012	0.031	0.025	0.023
0.86	0.015	0.022	0.015	0.015
1.24	0.008	0.005	0.007	0.007

Вывод: предложенный алгоритм позволяет восстанавливать коэффициенты отражения земной поверхности r_{surf} с абсолютной погрешностью меньшей, чем алгоритм однородной коррекции на их значения в диапазоне 0.004-0.081 и чем алгоритм квазиоднородной коррекции на их значения в диапазоне 0.005-0.048 при $\lambda \leq 0.55$ мкм для диффузных поверхностей с изменением r_{surf} по участку от значений 0.05 и менее до 0.4 и более.

Оценка преимущества предлагаемого алгоритма восстановления коэффициентов отражения в машинном времени и размерности решаемых систем уравнений

- Оценивалось ускорение, создаваемое использованием предлагаемых в алгоритме подходов для 4 каналов прибора MODIS (AQUA) для участка 1° на 1° . Ускорение составляет от 69 до 196 раз в зависимости от канала и дня.
- Оценивалось снижение размерности задачи при использовании радиусов бокового подсвета и области формирования дополнительной освещенности для участка размером 1° на 1° и для снимка, содержащего 2.7 млн. пикселей. Для снимка в 2.7 млн пикселей снижение размерности более 5700 раз. Для участка 1° на 1° размерность задачи снижается в 9-3000 раз в зависимости от канала и снимка

Фактор	λ , мкм	r_{surf}	τ	Δr_{surf}
Боковой подсвет и многократное отражение	0.42	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.592	$\Delta r_{surf} \leq 0.081$
	0.47	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.430	$\Delta r_{surf} \leq 0.046$
	0.55	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.285	$\Delta r_{surf} \leq 0.031$
	0.65	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.241	$\Delta r_{surf} \leq 0.017$
	0.86	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.143	$\Delta r_{surf} \leq 0.004$
	1.24	$0.05 \leq r_{surf} \leq 0.4$	0.085	$\Delta r_{surf} \leq 0.002$
Аппроксимация для I_{atm}	0.469	$0.02 \leq r_{surf} \leq 0.04$	$0.311 \leq \tau \leq 0.401$	$\Delta r_{surf} = 0.0035$
	0.555	$0.06 \leq r_{surf} \leq 0.08$	$0.218 \leq \tau \leq 0.314$	$\Delta r_{surf} = 0.003$
	0.645	$0.04 \leq r_{surf} \leq 0.09$	$0.160 \leq \tau \leq 0.251$	$\Delta r_{surf} = 0.0007$
	0.858	$0.28 \leq r_{surf} \leq 0.43$	$0.077 \leq \tau \leq 0.164$	$\Delta r_{surf} = 0.00075$
Неламбертовость поверхности	0.469	$r_{surf} = 0.0736$	0.353	$\overline{\Delta r_{surf}} \leq 0.005$
	0.555	$r_{surf} = 0.1171$	0.225	$\overline{\Delta r_{surf}} \leq 0.014$
	0.645	$r_{surf} = 0.1486$	0.191	$\overline{\Delta r_{surf}} \leq 0.019$
	0.858	$r_{surf} = 0.2929$	0.107	$\overline{\Delta r_{surf}} \leq 0.034$
Поляризация	0.4	$r_{surf} = 0.1$	0.592	$\Delta r_{surf} \leq 0.058$
	0.45	$r_{surf} = 0.1$	0.430	$\Delta r_{surf} \leq 0.016$
	0.55	$r_{surf} = 0.1$	0.285	$\Delta r_{surf} \leq 0.009$
	0.85	$r_{surf} = 0.1$	0.143	$\Delta r_{surf} \leq 0.004$

Формула для восстановления r_{surf} при использовании средних по каналу прибора оптических коэффициентов:

$$r_{surf,k} = \frac{\frac{I_{sum,k} - I_{atm,k}}{\tilde{I}_{surf,k} E_{0,k}}}{1 + \frac{I_{sum,k} - I_{atm,k}}{\tilde{I}_{surf,k} E_{0,k}} \times \gamma_{1,k}} \quad (11)$$

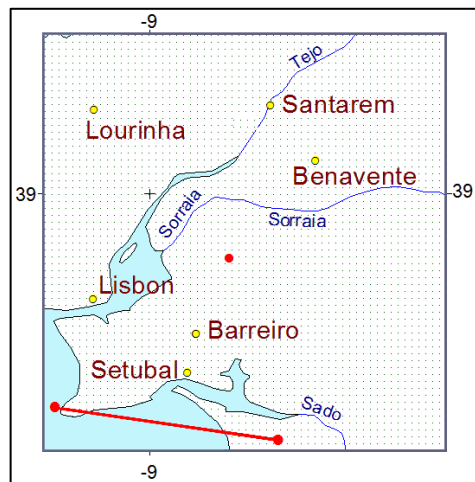
где $I_{sum,k}$ – измеренные прибором ГСА в k -м канале интенсивности принимаемого излучения, $I_{sun,k}$ – значения интенсивности излучения, не взаимодействовавшего с земной поверхностью; $\tilde{I}_{surf,k}$ – значение интенсивности принимаемого излучения, отраженного от земной поверхности при единичной светимости поверхности; $E_{0,k}$ – освещенность земной поверхности Солнцем без учета отражения от земной поверхности; $\gamma_{1,k}$ – вклад однократно отраженного излучения в освещенность земной поверхности.

Формула для восстановления r_{surf} с рандомизацией по длине волны:

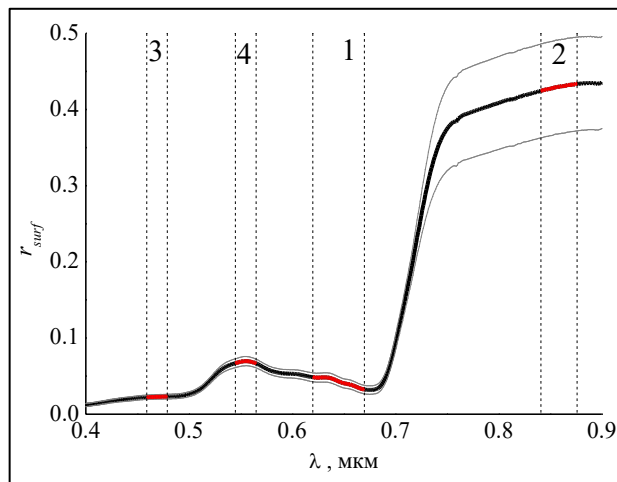
$$r_{surf,k} = \frac{\frac{I_{sum,k} - \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N I_{atm,ijk}}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N I_{surf,ijk} E_{0,ijk}}}{1 + \frac{\left(I_{sum,k} - \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N I_{atm,ijk} \right)}{\frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N I_{surf,ijk} E_{0,ijk}}} \times \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \gamma_{1,ijk} \quad (12)$$

$I_{sum,k}$ – измеренные прибором ГСА в k -м канале интенсивности принимаемого излучения, N – число фотонных траекторий в пачке, M – число пачек, f_{ijk} – значение аппаратной функции на случайной длине волны в пределах k -го канала прибора, соответствующая i -й траектории j -й пачки траекторий, $I_{sun,ijk}$ – значения интенсивности излучения, не взаимодействовавшего с земной поверхностью, полученное на случайной длине волны для k -го канала i -й траектории j -й пачки; $I_{surf,ijk}$ – значение интенсивности излучения принимаемого излучения, отраженного от земной поверхности при единичной светимости поверхности, полученное на случайной длине волны для k -го канала i -й траектории j -й пачки; $E_{0,ijk}$ – освещенность земной поверхности Солнцем без учета отражения от земной поверхности, полученная на случайной длине волны для k -го канала i -й траектории j -й пачки; $\gamma_{1,ijk}$ – вклад однократно излучения в освещенность земной поверхности, полученное на случайной длине волны для k -го канала i -й траектории j -й пачки.

• Валидация алгоритма по данным наземных измерений



(a)



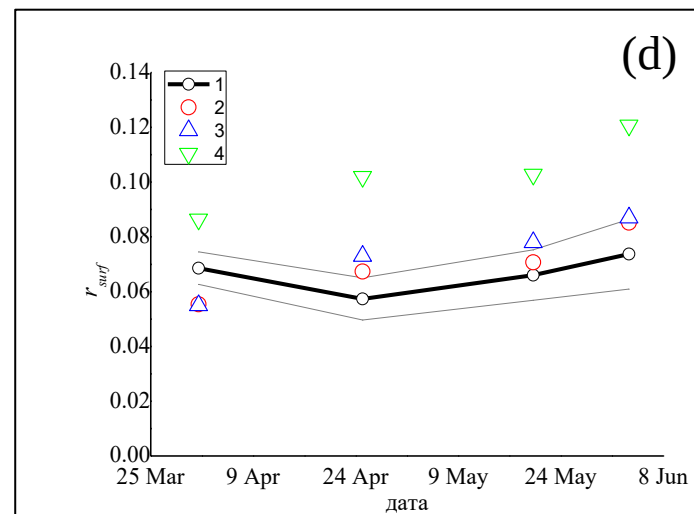
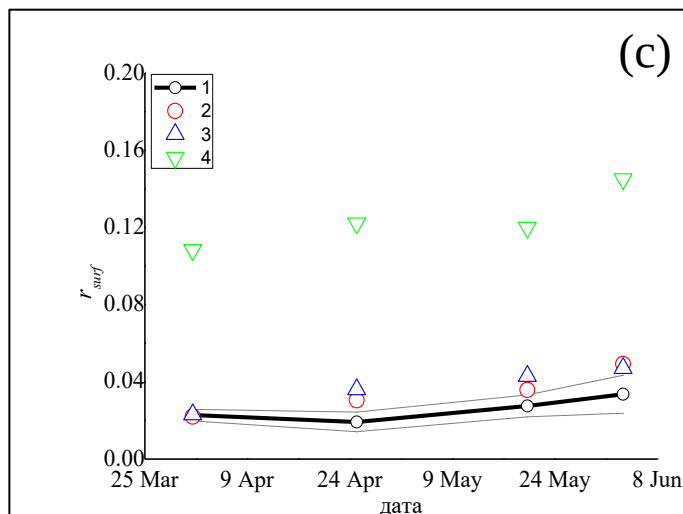
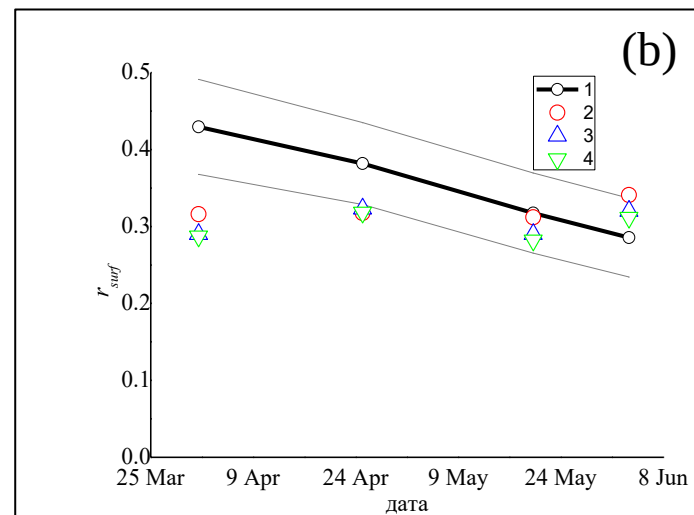
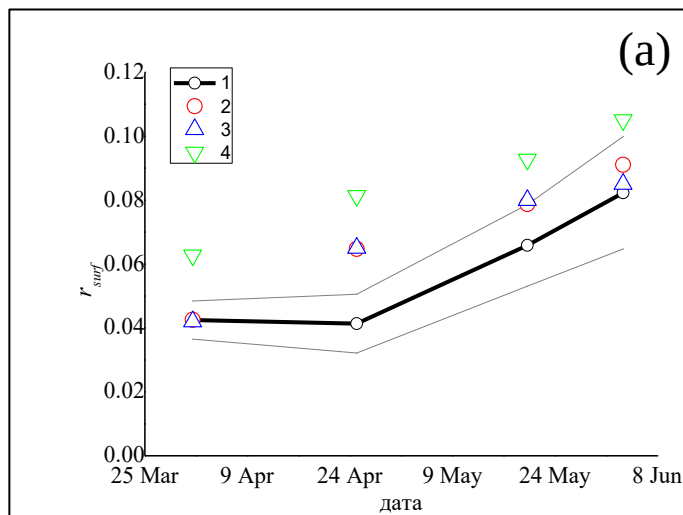
(b)

(a) Рассматриваемый участок земной поверхности с координатами 38.4-39.4° с.ш., 8.25-9.25° з.д.

(b) Наземные измерения коэффициентов отражения из [1] тестовой точки с координатами 38.829° с.ш., 8.791° з.д. Дата измерений 01.04.2016 г.

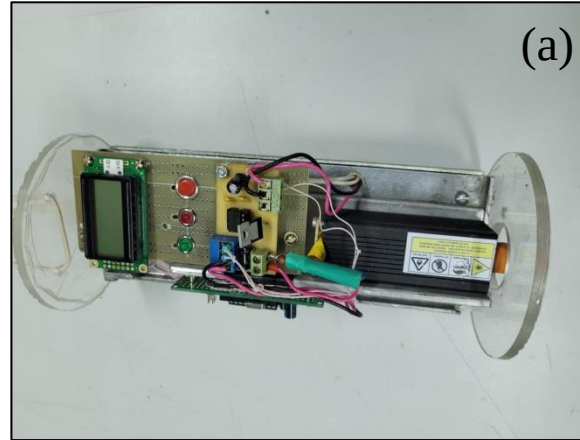
Наземные измерения, приведенные к средним по длинам волн каналов MODIS и их СКО.

Дата	Номер канала MODIS							
	1		2		3		4	
	r_{surf}	СКО	r_{surf}	СКО	r_{surf}	СКО	r_{surf}	СКО
01.04.2016	0.0425	0.0060	0.4295	0.0616	0.0228	0.0030	0.0686	0.0059
25.04.2016	0.0414	0.0092	0.3818	0.0533	0.0192	0.0051	0.0573	0.0077
20.05.2016	0.0659	0.0128	0.3175	0.0521	0.0275	0.0057	0.0661	0.0092
03.06.2016	0.0823	0.0176	0.2857	0.0512	0.0336	0.0098	0.0737	0.0127



Усредненные наземные измерения и результаты трех алгоритмов, полученных по данным AQUA. 1 – усредненные наземные измерения и их СКО (серым цветом); 2 - результаты предлагаемого алгоритма; 3 – результаты алгоритма MOD09; 4 – результаты алгоритма без атмосферной коррекции.
 (a) канал MODIS №1; (b) канал MODIS №2; (c) канал MODIS №3;
 (d) канал MODIS №4

Результаты экспериментов по оценке возможностей связи через границу раздела вода- атмосфера



Схемы проведенных

экспериментов на озере Мальцево

Вероятности регистрации ошибочных символов ($\bar{P}_e$) и их СКО ($\bar{\sigma}$) для схемы подводная передающая система – БПЛА

Передающая система (а), приемная

система, размещенная на БПЛА (б)

$\theta_d, ^\circ$	$h_d, \text{ м}$	$Y_N, \text{ м}$	$\bar{P}_e$	$\bar{\sigma}$
110	20	55	0	0
110	20	75	0.006	0.014
110	30	90	0.015	0.024
135	35	35	0	0
135	35	55	0	0
135	45	80	0.113	0.078

Критерий определения радиуса области формирования бокового подсвета

$$1 \geq \min_{ij} \frac{Q_{ij}}{\tilde{Q}_{ij}} \geq \delta_1$$

$$1 \geq \min_{ij} \frac{Q_{ij}}{\tilde{Q}_{ij}} \geq \frac{\min_{ij} Q_{ij}}{\max_{ij} \tilde{Q}_{ij}} \geq \delta_1$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sum_{k=1}^{N_i} \sum_{l=1}^{N_j} A_{ijkl} Q_{kl} + A_{out,ij} \bar{Q}_{ij}}{\sum_{k=1}^{M_{1,ij}} \sum_{l=1}^{M_{2,ij}} A_{ijkl} \tilde{Q}_{kl}} \geq \frac{\min_{i,j} Q_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{N_i} \sum_{l=1}^{N_j} A_{ijkl} + A_{out,ij} \right)}{\max_{i,j} \tilde{Q}_{i,j} \sum_{k=1}^{M_{1,ij}} \sum_{l=1}^{M_{2,ij}} A_{ijkl}} \\ &= \frac{\min_{i,j} Q_{i,j} \frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k)) + \iint_S h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS}{\max_{i,j} \tilde{Q}_{i,j} \frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k)) + \iint_{S(R_k)} h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS} \\ &\geq \delta_1 \frac{\frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k)) + \iint_S h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS}{\frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k)) + \iint_{S(R_k)} h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS} \end{aligned}$$

Откуда получаем, что для любых поверхностей радиус области формирования бокового подсвета достаточно задавать условием:

$$k_1(R_k) \equiv \frac{\iint_{S(R_k)} h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS}{\iint_S h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS} \geq \delta_1 + (\delta_1 - 1) \frac{\frac{1}{\pi} \exp(-\tau(\mu_k))}{\iint_S h(r_w, \varphi_w, \mu_k) dS}$$

Критерий задания области формирования дополнительной освещенности

$$1 \geq \min_{i,j} \frac{r_{surf,ij}}{\tilde{r}_{surf,ij}} \geq \delta_2 \qquad 1 \geq \min_{i,j} \frac{r_{surf,ij}}{\tilde{r}_{surf,ij}} \geq \frac{\min_{i,j} r_{surf,ij}}{\max_{i,j} \tilde{r}_{surf,ij}} \geq \delta_2$$

$$1 = \frac{r_{surf,ij} \left(1 + \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{l=1}^{N_j} r_{surf,kl} C_{ijkl} + C_{out,ij} \overline{r_{surf}} + \frac{(\overline{r_{surf}} \gamma_1)^2}{1 - \overline{r_{surf}} \gamma_1} \right)}{\tilde{r}_{surf,ij} \left(1 + \sum_{k=1}^{M_{3,ij}} \sum_{l=1}^{M_{4,ij}} \tilde{r}_{surf,kl} C_{ijkl} \right)} \geq$$

$$\frac{\min_{i,j} r_{surf,ij}}{\max_{i,j} \tilde{r}_{surf,ij}} \frac{1 + \gamma_1 \min_{i,j} r_{surf,ij} + \frac{(\gamma_1 \min_{i,j} r_{surf,ij})^2}{1 - \gamma_1 \min_{i,j} r_{surf,ij}}}{1 + \tilde{\gamma}_1(R_S) \max_{i,j} \tilde{r}_{surf,ij}} \geq \delta_2 \frac{1}{1 + \tilde{\gamma}_1(R_S) \max_{i,j} \tilde{r}_{surf,ij}}$$

$$\tilde{\gamma}_1(R_S) \equiv 2\pi \int_0^{R_S} h_1(\rho_w) d\rho_w$$

$$\tilde{\gamma}_1(R_S) \geq \frac{1}{\max_{i,j} \tilde{r}_{surf,ij}} \left(\frac{\delta_2}{1 - \gamma_1 \min_{i,j} r_{surf,ij}} - 1 \right) \geq \delta_2 \min_{i,j} r_{surf,ij} \left(\frac{\delta_2}{1 - \gamma_1 \min_{i,j} r_{surf,ij}} - 1 \right)$$

При $\min_{i,j} r_{surf,ij} = 1$ требования к R_S наибольшие. Тогда достаточно выполнения условия:

$$k_2(R_S) \equiv \frac{\tilde{\gamma}_1(R_S)}{\gamma_1} \geq \frac{\delta_2}{\gamma_1} \left(\frac{\delta_2}{1 - \gamma_1} - 1 \right)$$

Условия сходимости систем уравнений (1)-(2):

$$K_1 \equiv \max_{ij} \left(\frac{\sum_{k=1}^{N_i} \sum_{l=1}^{N_j} A_{ijkl} - \frac{1}{\pi} \exp(-\tau_{ij})}{\frac{1}{\pi} \exp(-\tau_{ij})} \right) < 1$$

$$K_3 \equiv \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1} < 1$$