

Новые схемы квантовых инерциальных датчиков на основе геометрической фазы ансамблей ультрахолодных атомов

В.А. Томилин*

*tomilin@iae.nsk.su

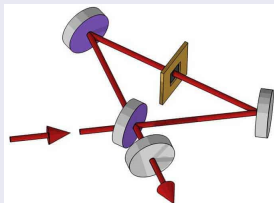
Институт автоматики и электрометрии СО РАН

23 сентября 2026, Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

- 1 Классические и квантовые инерциальные датчики
- 2 Физическая основа предлагаемых устройств
- 3 Результаты
- 4 Заключение

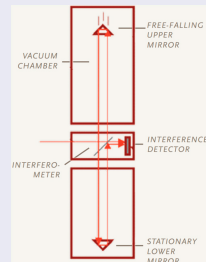
Классические инерциальные датчики

Оптические гироскопы на эффекте Саньяка



$$\Delta\varphi_{\text{photon}} = \frac{4\pi}{\lambda_{\text{photon}}c} \vec{\Omega} \cdot \vec{S}$$

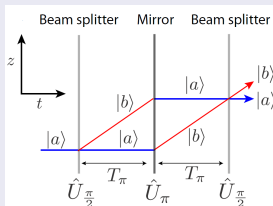
Оптические гравиметры



Точность измерения $g \sim 9.8m/s^2$ до
 $\sim 2 \cdot 10^{-8} m/s^2$
 Fang, Remote Sens. 16(14), 2634 (2024)

Квантовые гироскопы и акселерометры

Квантовые гироскопы на основе атомных интерферометров



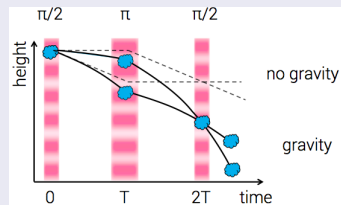
Gustavson et al., Class. Quant. Grav. 17, 2385 (2000)

$$\Delta\varphi_{atom} = \frac{4\pi}{\lambda_{atom}v} \vec{\Omega} \cdot \vec{S}$$

$$\Delta\varphi_{atom}/\Delta\varphi_{photon} =$$

$$\lambda m_{atom} c / \hbar \sim 10^{10}$$

Квантовые гравиметры



Kritsotakis et al., PRA 98, 023629 (2018)

$$\Delta\varphi_{atom} = (g \cdot k) T^2 \Rightarrow \Delta g = \frac{1}{\sqrt{N_{at} k_0} T^2}; k_0 \parallel g$$

Точность измерения $g \sim 9.8 m/s^2$
меньше $1 \cdot 10^{-8} m/s^2$

Применения инерциальных датчиков на холодных атомах

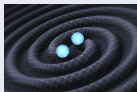
Навигация



Canuel et al., PRL 97, 010402 (2006)

Bidel et al., Nat. Commun. 9, 627 (2018)

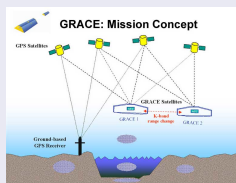
Космология



Arvanitaki et al., PRD 97, 075020 (2018)

Graham et al., PRL 110, 171102 (2013).

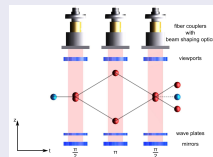
Гравиметрия



Andersen, Geophys. Res. Lett. 32, L01402 (2005)

Olsson, J. Geodynamics 83, 76–84 (2015)

Фундаментальная физика



Schlippert et al., PRL 112, 203002 (2014)

Bidel et al., Nat. Commun. 9, 627 (2018)

Общая схема

Две атомные моды (конденсата Бозе-Эйнштейна) с различной чувствительностью к ускорению:

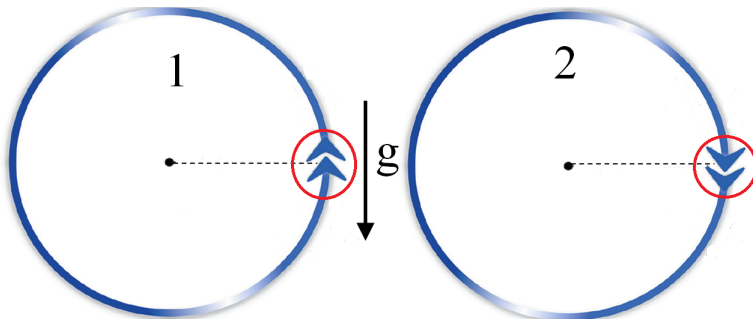
$$\sum_{n=0}^N f_n |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \rightarrow \sum_{n=0}^N f_n e^{in\theta_1} |n\rangle_1 \otimes e^{i(N-n)\theta_2} |N-n\rangle_2$$

$$f_n \rightarrow f_n e^{in(\theta_1 - \theta_2)}$$

Разность фаз может быть зарегистрирована в интерференционном эксперименте.

Чувствительность к ускорению

Идея – две кольцевых моды с *локализованными* потенциальными дефектами, задающими *различные* направления на кольцах.



Eckel et al., Nature 506, 200 (2014)
Ryu et al., Phys. Rev. Lett. 111, 205301 (2013)

Формализм трансфер-матриц

Амплитуды слева и справа от дефекта связаны **трансфер-матрицей**:

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}; |u|^2 - |v|^2 = 1$$

Трансфер-матрица $\rightarrow$ граничные условия $\rightarrow$ спектр.

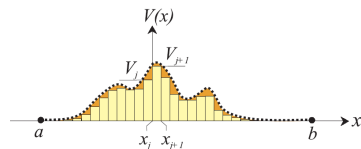
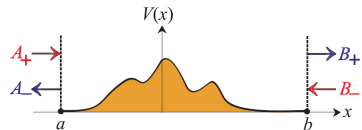
Важное свойство – можно строить дефект из элементарных “блоков”:

для 1-й моды $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2$

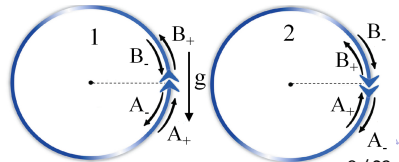
для 2-й моды $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_1$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & i \sinh(\eta) \\ -i \sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix}$$



Sanchez-Soto et al., Phys. Rep. 513, 191 (2012).



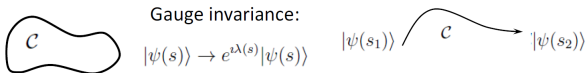
Генерация геометрической фазы

Медленная вариация параметров потенциала $p = (\eta, \alpha)$ порождает геометрическую фазу (фазу Берри):

$$\vartheta_g \doteq \frac{i}{2} \oint \frac{\langle \Psi_p | \nabla_p \Psi_p \rangle - \langle \nabla_p \Psi_p | \Psi_p \rangle}{\langle \Psi_p | \Psi_p \rangle} dp \quad (\text{замкнутый контур})$$

$$\vartheta_g = \arg \langle \Psi^{(i)} | \Psi^{(f)} \rangle + \frac{i}{2} \int_P \frac{\langle \Psi_p | \nabla_p \Psi_p \rangle - \langle \nabla_p \Psi_p | \Psi_p \rangle}{\langle \Psi_p | \Psi_p \rangle} dp \quad (\text{незамкнутый контур})$$

При этом фазы, приобретаемые модами, должны быть различными и зависящими от ускорения.

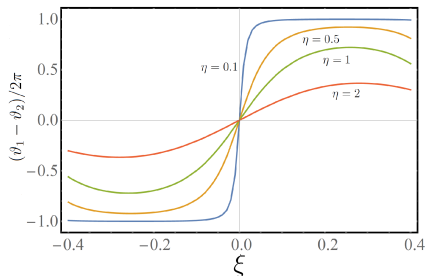
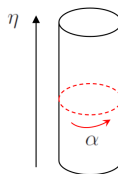


Berry, Proc. R. Soc. London Ser. A 392, 45 (1984)

Результаты – гироскоп с “абстрактным” дефектом

Параметры модели

m – масса атома (^{87}Rb)
 R – радиус кольца (0.25cm)
 $\xi = mR^2\Omega/\hbar$ – безразмерная
скорость вращения
 $\Omega = \Omega_{\text{Earth}}$: $\xi \simeq 0.392$
Контур вариации:
 $\rho = (\eta = \text{const}, \alpha \in [0, 2\pi])$



Ростом, Томилин, Ильичёв, ЖЭТФ 162, 307-312
(2022)

Недостатки модели

- Неясно, как может быть реализована
- Коэффициенты трансфер-матрицы не зависят от энергии

Результаты – гироскоп с “реальным” дефектом

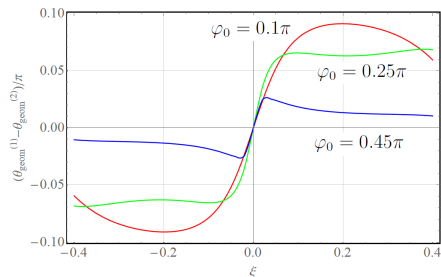
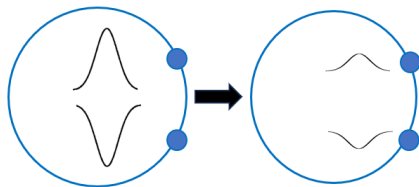
Параметры модели

Комбинация δ -образных барьера и ямы (высота и глубина a , угловые координаты $\pm\varphi_0$)

Контур вариации:

$$a = a_0 \cdot \cos^2 \alpha$$

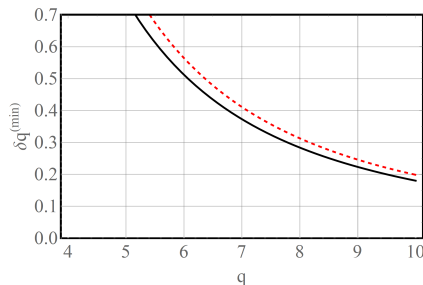
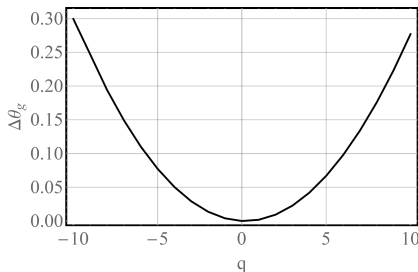
$\alpha \in [0, \pi]$ (при вариации по замкнутому контуру $\vartheta_g \equiv 0$)



Томилин, Ростом, Ильичёв, ПЖЭТФ 119, 381-387 (2024)

Разница геометрических фаз слабо зависит от величин дефектов, но весьма чувствительны к их взаимному расположению. В частности, $\Delta\theta_{\text{geom}} = 0$ при $\varphi_0 = \pi/2$

Результаты – гравиметр с “абстрактным” дефектом



Ростом, Томилин, Ильичёв, ПЖЭТФ 120,
560-567 (2024).

Параметры модели

$q = 4m^2 R^3 g / \hbar^2$ – безразмерное
линейное ускорение g

$R = 0.25 \text{ mm}$

Дефект с $\eta = 1$

Контур вариации:

$p = (\eta = \text{const}, \alpha \in [0, 2\pi])$

Точность измерения q при $N_{at} = 100$

$$\delta q \geq \frac{1}{\sqrt{n_{\text{exp}}} \cdot \sqrt{I_q}} \doteq \frac{\delta q^{(\min)}}{\sqrt{n_{\text{exp}}}} - \text{неравенство}$$

Крамера-Рао

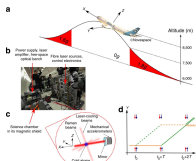
I_q – квантовая информация Фишера

$\delta q^{(\min)} / q \sim 0.02$ при $q = 10$, т.е. при
ускорениях $\sim 10^{-6} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2$

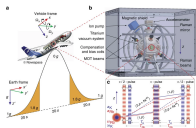
Ростом, Томилин, Ильичёв, ПЖЭТФ 120,
560-567 (2024)

Сравнение с другими схемами

Очевидное приложение – измерение микрогравитации



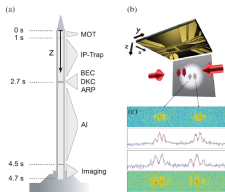
Geiger et al., Nat. Commun. 2, 474 (2011)



Barrett et al., Nat. Commun. 7, 13786 (2016)

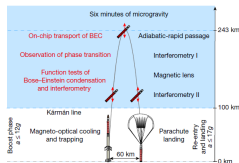
Чувствительность

$$10^{-4} \div 10^{-5} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2$$

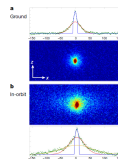


Muntinga et al., PRL 110, 093602 (2013)

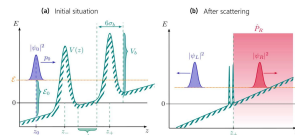
Разрешение до $10^{-12} g$ (?)



Becker et al., Nature 562, 391 (2018)



Конденсат на МКС, но нет интерферометра
Aveline et al., Nature 582, 193 (2020)



$\delta g^{(min)} / g \sim 0.2 @ g = 10^{-5} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2$
 $N_{\text{at}} = 100$ (теория)
 Schach et al., EPJ Quant. Tech. 9, 20 (2020)

Учёт взаимодействия

В низкоразмерных системах взаимодействие между частицами весьма существенно. Мы будем учитывать его в рамках *модели Либ-Линигера* ($\hbar = 2m = 1$, $c > 0$ (отталкивание)):

$$\sum_{i=1}^N \hat{k}_i^2 \Psi(x_1, \dots, x_N) + 2c \sum_{i>j} \delta(x_i - x_j) \Psi(x_1, \dots, x_N) = E \Psi(x_1, \dots, x_N)$$

Lieb and Liniger, Phys. Rev. 130, 1605 (1963); Lieb, Phys. Rev. 130, 1616 (1963).

Общее решение представимо в виде (элементарной) волновой функции Бете (*анзац Бете*):

$$\Psi_{\{k_1, \dots, k_N\}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{p \in S_N} A^{(p)}(k_1, \dots, k_N) \cdot \exp[i \sum_{j=1}^N k_j x_{p(j)}]$$

Bethe, Zeitschrift fur Physik 71, 205 (1931).

Решения для локализованного дефекта (N=2)

$$\Psi(x_1, x_2) =$$

$$\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2) + \Psi_{\{k_1, -k_2\}}(x_1, x_2) + \Psi_{\{-k_1, k_2\}}(x_1, x_2) + \Psi_{\{-k_1, -k_2\}}(x_1, x_2)$$

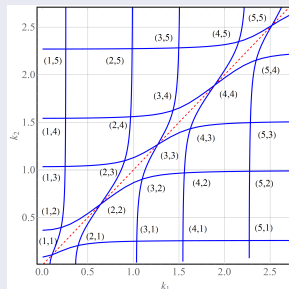
$$(k_1^2 - k_2^2 - c^2) \operatorname{Re}(u \cdot e^{-ik_1 L}) - 2ck_1 \operatorname{Im}(u \cdot e^{-ik_1 L}) = k_1^2 - k_2^2 + c^2,$$

$$(k_2^2 - k_1^2 - c^2) \operatorname{Re}(u \cdot e^{-ik_2 L}) - 2ck_2 \operatorname{Im}(u \cdot e^{-ik_2 L}) = k_2^2 - k_1^2 + c^2,$$

Уровни энергии

Как и в обычной двухчастичной модели Либ-Линигера, уровни энергии обозначаются парами целых чисел (i, j) , нумерующими “вертикальные” и “горизонтальные” кривые:

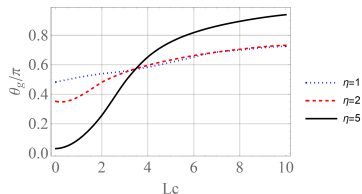
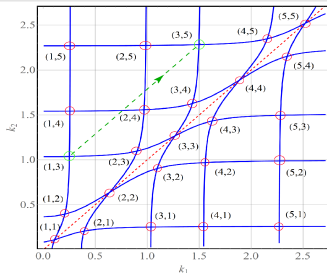
$$E^{(i,j)} = k_1^{(i,j)^2} + k_2^{(i,j)^2}$$



Расчёт геометрической фазы и анализ результатов

При вариации параметров дефекта траектории решений представляют собой прямые линии. Циклическая вариация приводит к изменению стационарного состояния (с изменением энергии). Тогда геометрическая фаза дополняется разностью фаз начального и конечного состояний:

$$\theta_g = \arg\langle\Psi(\alpha=0)|\Psi(\alpha=2\pi)\rangle + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\langle\Psi|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi\rangle - \langle\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} d\alpha$$



Режим слабого взаимодействия: $\theta_g \rightarrow -\arccos\left(\frac{1}{\cosh\eta}\right) + \pi/2$,

т.е. более прозрачный дефект обеспечивает большую величину геометрической фазы.

Заключение

Результаты

- Предложена новая концепция квантовых инерционных датчиков, в которых регистрируемой величиной является разность геометрических фаз, возникающая в результате вариации потенциалов двух атомных мод
- Продемонстрирована возможность регистрации угловых скоростей порядка скорости вращения Земли вокруг своей оси
- Первичные оценки в идеализированной модели показывают принципиальную возможность регистрации малых ускорений порядка $10^{-6}g$
- Впервые исследовано влияние межчастичного взаимодействия на геометрическую фазу

Публикации

- А.М. Ростом, В.А. Томилин, Л.В. Ильичёв, “Геометрическая фаза как основа квантовой гироскопии”, ЖЭТФ **162**, 307-312 (2022) (**исходная теоретическая модель гироскопа**).
- В.А. Томилин, А.М. Ростом, Л.В. Ильичёв “Конфигурация “барьер–яма” в схеме квантового гироскопа на основе геометрической фазы атомарного конденсата”, Письма в ЖЭТФ **119**, 381-387 (2024) (**гироскоп с “реальным” дефектом**).
- А.М. Ростом, В.А. Томилин, Л.В. Ильичёв, “Геометрическая фаза как основа квантовой акселерометрии”, Письма в ЖЭТФ **120**, 560-567 (2024) (**теоретическая модель гравиметра**).
- В.А. Томилин, А.М. Ростом, Л.В. Ильичёв, “Геометрическая фаза двухчастичной волновой функции Бете”, Письма в ЖЭТФ **123**, 567-573 (2026) (**учёт взаимодействия**).

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 23-12-00182, 23-12-00182-П).

Спасибо за внимание!

Уравнения Шрёдингера

Вращение

$$\Psi''(\varphi) - 2i\xi\Psi'(\varphi) + \varepsilon\Psi(\varphi) = 0$$

$\varepsilon = mR^2 E/\hbar^2$ – безразмерная энергия

$\xi = mR^2\Omega/\hbar$ – безразмерный параметр скорости вращения

Линейное ускорение

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi(z) + (\kappa^2 - 2q \cdot \cos 2z)\Psi(z) = 0$$

$$z = 2\varphi$$

$\kappa^2 = 8mR^2 \cdot (E - mgR)/\hbar^2$ – “кинетическая энергия”

$q = 4m^2 R^3 g/\hbar^2$ – эффективная глубина потенциала, создаваемого ускорением свободного падения g

Вращение в модели Либа-Линигера

$$(k_1^2 - k_2^2 - c^2)\operatorname{Re}(u \cdot e^{ik_1 L}) - 2ck_1 \operatorname{Im}(u \cdot e^{ik_1 L}) = (k_1^2 - k_2^2 + c^2)\cos \Omega L + 2ck_2 \sin \Omega L,$$

$$(k_2^2 - k_1^2 - c^2)\operatorname{Re}(u \cdot e^{ik_2 L}) - 2ck_2 \operatorname{Im}(u \cdot e^{ik_2 L}) = (k_2^2 - k_1^2 + c^2)\cos \Omega L + 2ck_1 \sin \Omega L.$$

Вычисление квантовой информации Фишера

Если состояние чистое (нет потери атомов при наблюдении интерференции):

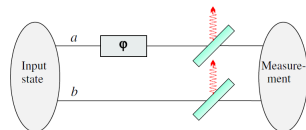
$I_q = 4 \left| \frac{\partial \Delta \theta_g}{\partial q} \right|^2 \cdot (\Delta n)^2$ (распределение числа атомов по модам полагаем биномиальным)

Если теряется $(1 - T)N_{at}$ в одной из мод (Dorner et al., PRL **102**, 040403 (2009)):

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &\doteq \sum_{i=0}^{N_{at}} \hat{K}_i |\Psi(q)\rangle \langle \Psi(q)| \hat{K}_i^\dagger \doteq \sum_{i=0}^{N_{at}} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \\ \hat{K}_i &\doteq \frac{(\sqrt{1-T})^i}{\sqrt{i!}} (\sqrt{T})^{\hat{n}} \hat{a}^i \\ p_i &\doteq \langle \Psi(q) | \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i | \Psi(q) \rangle \\ |\psi_i\rangle &\doteq \frac{\hat{K}_i}{\sqrt{p_i}} |\Psi(q)\rangle\end{aligned}$$

Оценка сверху (Fujiwara, PRA **63**, 042304 (2001)):

$$I_q \leq \tilde{I}_q \doteq 4 \left| \frac{\partial \Delta \theta_g}{\partial q} \right|^2 \cdot \sum_i p_i (\Delta n)_i^2$$



Оценка параметра взаимодействия

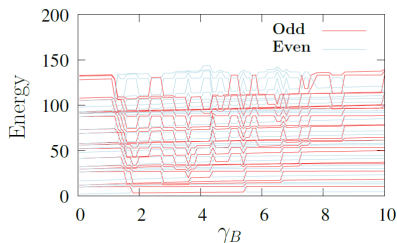
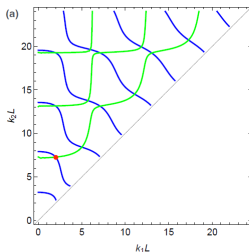
Параметр взаимодействия s характеризует обратную длину (одномерного) s -рассеяния. Она может быть связана с обычной длиной рассеяния a и характерным поперечным размером кольца $a_{\perp}$:

$$\frac{\hbar^2}{mc} = \frac{a_{\perp}^2}{2a} \left(1 - C \frac{a}{a_{\perp}}\right), \quad C \approx 1.4603$$

Olshanii, PRL 81, 938 (1998).

Для ^{87}Rb при $\omega_{\perp} = 2\pi \times 50\text{kHz}$ и $a \approx 100a_B$ $c \approx 10^5\text{cm}^{-1}$, т.е. для кольца радиуса $50\mu\text{m}$ $Lc \approx 240$.

Дифракция на δ -потенциале



При наличии дополнительного δ -дефекта система перестаёт быть интегрируемой из-за наличия дифракции.

Olshanii et al., arXiv:2511.13385v1 (2005).

Olshanii et al., SciPost Phys. Core 8, 083 (2025).