



РОСАТОМ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ КОРПОРАЦИЯ ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ «РОСАТОМ»



# Квантовая электродинамика с самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями для фермионных полей

*В.П.Незнамов, В.Е.Шемарулин*

# Содержание

1. Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле
2. Квантовая электродинамика с фермионными уравнениями со спинорными волновыми функциями
  - 2.1 Пропагатор для уравнения Клейна-Гордона
  - 2.2. Операторы электромагнитного взаимодействия
  - 2.3 Правила Фейнмана
  - 2.4 Расчеты квантово-электродинамических процессов
  - 2.5 Собственная энергия электрона
  - 2.6 Аномальный магнитный момент электрона
  - 2.7 Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов
  - 2.8 Физический вакуум теории. Отсутствие поляризации вакуума.

3. Необходимость разработки эффективного кулоновского потенциала, учитывающего эффекты внутренней структуры электрона и протона

*3.1 Потенциал Юлинга*

*3.2 Непроницаемый барьер в отталкивающем кулоновском поле. Связь спина и заряда фермиона*

*3.3 Фермион как частица метрики Керра-Ньюмена*

*3.4 Связь с экспериментами по изучению внутренней структуры электрона*

*3.5 Возможно ли согласование п.3.1 – 3.4?*

4. Выводы

# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Для фермионов с массой  $m$  и зарядом  $e$ , движущихся во внешнем электромагнитном поле, уравнение Дирака можно записать как:

$$\left[ p^0 - eA^0(\mathbf{r}, t) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \beta m \right] \psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Здесь  $\psi(\mathbf{r}, t)$  - биспинорная волновая функция;  
 $A^0(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  - потенциалы электромагнитного поля;  
 $\alpha^k, \beta$  - четырехмерные матрицы Дирака,  $k = 1, 2, 3$ ;  
 $p^0 = i(\partial/\partial t)$ ,  $\mathbf{p} = -i\vec{\nabla}$ .

Пусть

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix},$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\chi(\mathbf{r}, t)$  - спинорные волновые функции.

# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Тогда можно записать следующие выражения

$$(p^0 - eA^0 - m)\varphi = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi,$$

$$(p^0 - eA^0 + m)\chi = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi,$$

$$\chi = \left(1/(p^0 - eA^0 + m)\right)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi,$$

$$\varphi = \left(1/(p^0 - eA^0 - m)\right)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi.$$

$\sigma^i$  - матрицы Паули. Из приведенных равенств можно получить уравнения

$$\left[ p^0 - eA^0 - m - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\left[ p^0 - eA^0 + m - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) отличаются друг от друга заменой  $p^0 \rightarrow -p^0, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}, e \rightarrow -e$ , либо заменой  $+m \rightarrow -m$ .

# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Умножим уравнение (1) слева на оператор  $(p^0 - eA^0 + m)$ , а уравнение (2) на оператор  $(p^0 - eA^0 - m)$ . Получаем

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 + m)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\frac{1}{p^0 - eA^0 + m}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 - m)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\frac{1}{p^0 - eA^0 - m}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi = 0. \quad (4)$$

Полученные уравнения необходимо привести к самосопряженному виду.

Примечательно, что операторы преобразования подобия записываются в замкнутом виде

$$\Phi = g_\varphi \varphi, \quad X = g_\chi \chi,$$

$$g_\varphi = (p^0 - eA^0 + m)^{-1/2},$$

$$g_\chi = (p^0 - eA^0 - m)^{-1/2}.$$

# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

После преобразований уравнения (3), (4) принимают самосопряженный вид

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 + m)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p^0 - eA^0 + m)^{1/2} \right] \Phi = 0, \quad (5)$$

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 - m)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p^0 - eA^0 - m)^{1/2} \right] X = 0. \quad (6)$$

Полученные уравнения, по-прежнему, переходят друг в друга при замене  $p^0 \rightarrow -p^0$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ,  $e \rightarrow -e$ , либо при замене  $+m \rightarrow -m$ .

Каждое из этих уравнений содержит решения с положительной и отрицательной энергиями. Ниже будем использовать для электронов решения (5) с положительными энергиями, для позитронов – решения (6) с отрицательными энергиями. Вторая пара решений (5), (6) соответствует решениям с измененным знаком перед массой электрона (позитрона) и не несет дополнительной физической информации. Ниже эти решения мы не будем рассматривать.

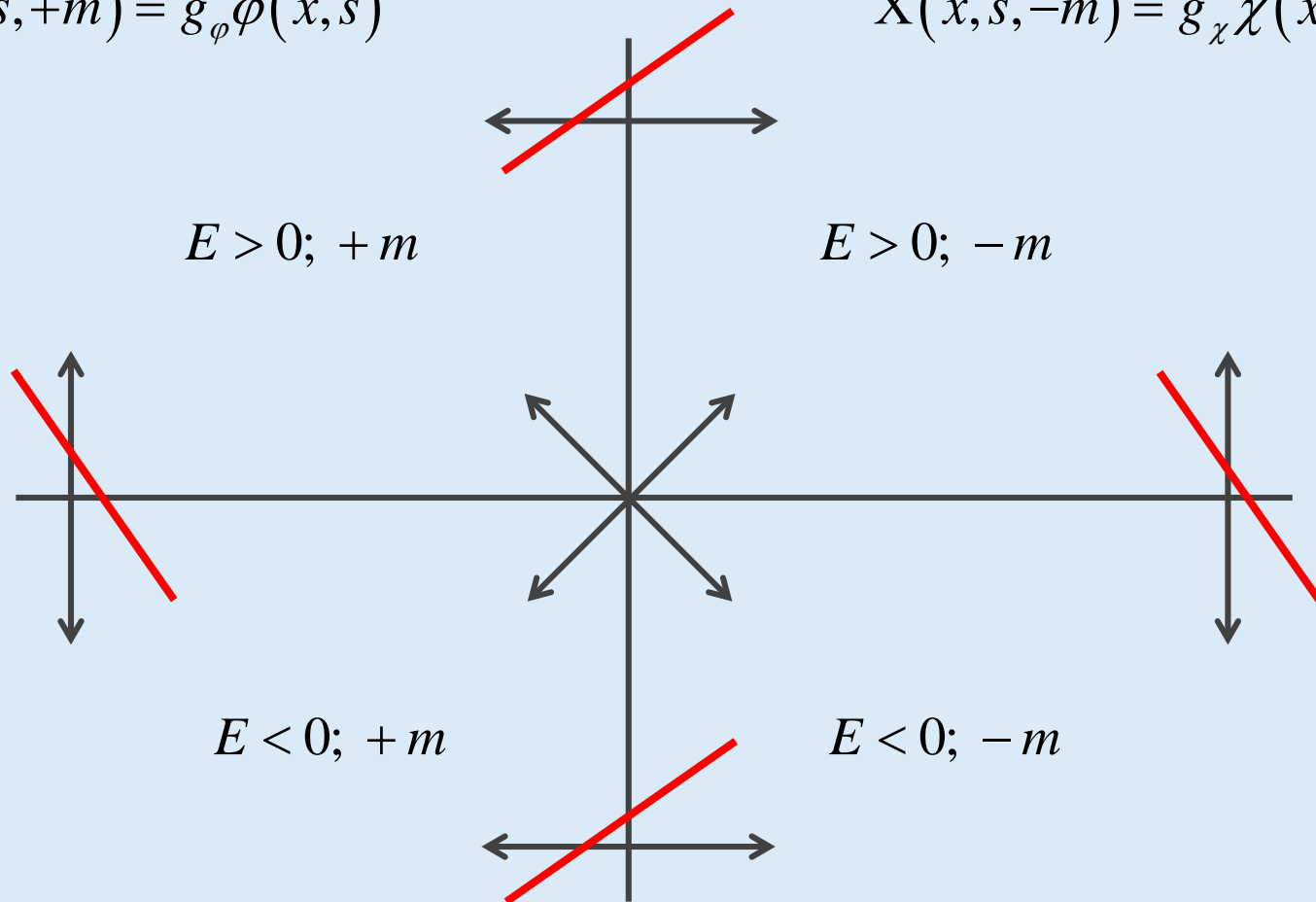
# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Уравнение (5);

$$\Phi(x, s, +m) = g_\varphi \varphi(x, s)$$

Уравнение (6);

$$X(x, s, -m) = g_\chi \chi(x, s)$$





# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Итак в квантовой электродинамике спинор  $\Phi(x, s) = g_\varphi \varphi(x, s)$  будет представлять оператор электронного поля с положительной энергией, спинор  $X(x, s) = g_\chi \chi(x, s)$  будет представлять оператор позитронного поля с отрицательной энергией.

При отсутствии электромагнитного поля ( $A^\mu = 0$ ) уравнения (5), (6) представляют собой свободные уравнения Клейна-Гордона со спинорными волновыми функциями.

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) F_0^\pm(x, s) = 0.$$

Здесь  $F_0^+(x, s) = \Phi_0(x, s)$ ,  $F_0^-(x, s) = X_0(x, s)$ .

Решения в виде плоских волн, нормированные в непрерывном спектре, имеют вид

$$F_0^\pm(x, p, s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{\mp i p x} U_s,$$

$E_p = p^0 > 0$ ,  $p^2 = m^2$ ,  $U_s$  - нормированные двухкомпонентные спиновые функции Паули.

# Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов во внешнем электромагнитном поле

Условия ортонормированности:

$$\int d\mathbf{x} \bar{F}_0^\pm(x, p', s') i\vec{\partial}_0 F_0^\pm(x, p, s) = \pm \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'},$$

$$\int d\mathbf{x} \bar{F}_0^\pm(x, p', s') i\vec{\partial}_0 F_0^\mp(x, p, s) = 0,$$

где обозначение  $a\vec{\partial}_0 b \equiv a \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} b$ . Черта над функцией означает эрмитовое сопряжение.

Фейнмановский пропагатор находится из решения уравнения

$$\left(\square_{x'} + m^2\right)\Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x),$$

где  $\square_{x'}$  - даламбертиан.

При переходе к импульсному представлению получаем

$$\Delta_F(x' - x) = \int d^4 p \frac{e^{-ip(x'-x)}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

# Операторы взаимодействия

Перепишем самосопряженные уравнения в виде

$$\left( (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 \right) F^\pm(x, s) = V(p^\mu, eA^\mu, \pm m) F^\pm(x, s),$$

где

$$V(p^\mu, eA^\mu, \pm m) = p^0 eA^0 + eA^0 p^0 - e^2 A_0^2 - \mathbf{p}^2 + (p^0 - eA^0 \pm m)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \\ \times \frac{1}{p^0 - eA^0 \pm m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p^0 - eA^0 \pm m)^{1/2}.$$

Знаки «+» и «-» перед  $m$  относятся к одному из самосопряженных уравнений соответственно.

В отличие от дираковского представления КЭД, наше представление приводит к бесконечному множеству типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений.

В данной работе мы будем рассматривать квантово-электродинамические процессы  $\sim e, e^2$  и  $e^3$ . Разложим последнее выражение до степеней  $\sim e^3$ .

# Операторы взаимодействия

Для удобства перейдем в представление, в котором диагональны импульсные переменные. В этом представлении матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k}).$$

Представим поле  $A^\mu(\mathbf{x}, t)$  интегралом Фурье.

$$\text{где } A_{(v)k}^\mu(t) = \begin{cases} A_k^\mu e^{ik_0 t}, & v = 1, \\ \bar{A}_{(-k)}^\mu e^{-ik_0 t}, & v = -1. \end{cases} \quad A^\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{v=\pm 1} \int A_{(v)k}^\mu(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k},$$

В импульсном представлении  $\langle \mathbf{p}' | A^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{v=\pm 1} A_{(v)(p''-p')}^\mu(t); |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'|,$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | A^\mu A^\lambda | \mathbf{p}'' \rangle &= \int d\mathbf{p}''' \langle \mathbf{p}' | A^\mu | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^\lambda | \mathbf{p}'' \rangle = \\ &= \sum_{v, v'=\pm 1} d\mathbf{p}''' A_{(v)(p'''-p')}^\mu(t) A_{(v')(p''-p''')}^\lambda(t); |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'|, |\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | A^\mu A^\lambda A^\delta | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v, v', v''=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} A_{(v)(p'''-p')}^\mu(t) A_{(v')(p^{IV}-p''')}^\lambda(t) \times \\ &\times A_{(v'')(p''-p^{IV})}^\delta(t); |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'|, |\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}^{IV} - \mathbf{p}''''|, |\mathbf{k}''| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}^{IV}|. \end{aligned}$$

# Операторы взаимодействия

Обозначим  $X = p^0 \pm m$ , где по-прежнему оператор  $p^0 = i(\partial/\partial t)$ .

Тогда

$$\frac{1}{p^0 \pm m - eA^0} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \dots$$

При разложении  $(p^0 - eA^0 \pm m)^{1/2}$  будем использовать импульсное представление. Тогда

$$(X - eA^0)^{1/2} = X^{1/2} + A + B + C.$$

$$A \sim e, B \sim e^2, C \sim e^3.$$

$$X - eA^0 = (X^{1/2} + A + B + C)^2.$$

Отсюда

$$1. \quad AX^{1/2} + X^{1/2}A = -eA^0, \quad \langle \mathbf{p}' | A | \mathbf{p}'' \rangle = \left\langle \mathbf{p}' \left| -\frac{eA^0}{I + II} \right| \mathbf{p}'' \right\rangle,$$

где  $I = (X')^{1/2}$ ,  $II = (X'')^{1/2}$ .

$$2. BX^{1/2} + X^{1/2}B + A^2 = 0,$$

$$\langle \mathbf{p}' | B | \mathbf{p}'' \rangle = - \int d\mathbf{p}''' \frac{\langle \mathbf{p}' | eA^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | eA^0 | \mathbf{p}'' \rangle}{(I + II)(I + III)(III + II)}.$$

$$3. CX^{1/2} + X^{1/2}C + BA + AB = 0,$$

$$\langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle = - \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} \frac{(I + III + IV + II) \langle \mathbf{p}' | eA^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | eA^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | eA^0 | \mathbf{p}'' \rangle}{(I + II)(I + III)(I + IV)(III + II)(IV + II)}.$$

где  $III = (X''')^{1/2}$ ,  $IV = (X^{IV})^{1/2}$ .

# Операторы взаимодействия

С учетом приведенных выражения искомое разложение можно представить в виде

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

где  $V_1 \sim e$ ,  $V_2 \sim e^2$ ,  $V_3 \sim e^3$ .

В импульсном представлении

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | V_1 | \mathbf{p}'' \rangle = & e \left( (p')^0 + (p'')^0 - \frac{(p')^2}{I(I+II)} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}' \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}''}{I \cdot II} - \frac{(p'')^2}{II(I+II)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & + e \left( -\frac{II}{I} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}' \sigma^i - \frac{I}{II} \sigma^i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'' \right) \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'' \rangle. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V_2 = & \left[ -1 - \frac{(\mathbf{p}')^2}{I(I+II)(I+III)(III+II)} + \frac{(\mathbf{p}''')^2}{III^2(I+III)(II+III)} - \right. \\
 & \left. - \frac{(\mathbf{p}'')^2}{II(I+II)(I+III)(III+II)} + \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}''}{I \cdot II \cdot III^2} - \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}'''}{II \cdot III^2 \cdot (II+III)} - \frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2 \cdot (I+III)} \right] \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \frac{I \cdot II}{III^2} \sigma^i \sigma^k \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \left[ \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma^i}{I(I+III)} - \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2} + \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}'''}{III^2(III+II)} \right] \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle \\
 & + \left[ -\frac{II}{I \cdot III^2} \sigma\mathbf{p}'\sigma^i + \frac{1}{II(I+III)} \sigma^i\sigma\mathbf{p}'' + -\frac{II}{III^2(I+III)} \sigma\mathbf{p}'''\sigma^i \right] \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^i | \mathbf{p}'' \rangle,
 \end{aligned}$$

# Операторы взаимодействия $\sim e^2, e^3$

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \left( \frac{(\mathbf{p}^{IV})^2}{IV^2 \cdot (I+IV)(I+III)(III+IV)(IV+II)} - \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}^{IV}}{I \cdot III^2 \cdot IV^2 (IV+II)} - \frac{\sigma \mathbf{p}''' \sigma \mathbf{p}''}{II \cdot III^2 \cdot IV^2 (I+III)} + \right. \\
 & + \frac{(\mathbf{p}''')^2}{III^2 \cdot (I+III)(III+IV)(III+II)(IV+II)} - \frac{\sigma \mathbf{p}^{IV} \sigma \mathbf{p}''}{II \cdot IV^2 (I+III)(I+IV)(III+IV)} - \\
 & - \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'''}{I \cdot III^2 (III+II)(III+IV)(IV+II)} + \frac{\sigma \mathbf{p}''' \sigma \mathbf{p}^{IV}}{III^2 \cdot IV^2 (I+III)(IV+II)} + \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}''}{I \cdot II \cdot III^2 \cdot IV^2} - \\
 & \left. - \frac{(\mathbf{p}')^2 (I+II+III+IV)}{I(I+II)(I+III)(I+IV)(III+IV)(III+II)(IV+II)} - \frac{(\mathbf{p}'')^2 (I+II+III+IV)}{II(I+II)(I+III)(I+IV)(III+IV)(III+II)(IV+II)} \right) \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \frac{I \cdot II}{III^2 \cdot IV^2} \sigma^i \sigma^k \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \left( - \frac{\sigma \mathbf{p}''' \sigma^i}{III^2 (I+III)(IV+II)} - \frac{\sigma^i \sigma \mathbf{p}^{IV}}{IV^2 (I+III)(IV+II)} + \frac{\sigma^i \sigma \mathbf{p}''}{II \cdot IV^2 (I+III)} + \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma^i}{I \cdot III^2 (IV+II)} \right) \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^i | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle - \frac{I \sigma^i \sigma^k}{III^2 (IV+II)} \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^k | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle - \\
 & - \frac{\sigma^i \sigma^k II}{IV^2 (I+III)} \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^i | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \left( - \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma^i II}{I \cdot III^2 IV^2} + \frac{\sigma \mathbf{p}''' \sigma^i II}{III^2 IV^2 (I+III)} + \frac{\sigma \mathbf{p}^{IV} \sigma^i II}{IV^2 (I+IV)(I+III)(III+IV)} + \right. \\
 & + \left. \frac{\sigma^i \sigma \mathbf{p}''}{II (I+IV)(I+III)(III+IV)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^i | \mathbf{p}'' \rangle + \left( - \frac{I \sigma^i \sigma \mathbf{p}''}{II \cdot III^2 IV^2} + \frac{I \sigma^i \sigma \mathbf{p}'''}{III^2 (III+II)(III+IV)(IV+II)} + \right. \\
 & + \left. \frac{I \sigma^i \sigma \mathbf{p}^{IV}}{III^2 \cdot IV^2 (IV+II)} + \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma^i}{I (III+II)(III+IV)(IV+II)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle.
 \end{aligned}$$

# Правила Фейнмана

В отличие от дираковского представления, в нашем случае существует бесконечное множество типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений: вершине взаимодействия с одним фотоном соответствует фактор  $(-iV_{1\mu})$ , вершине взаимодействия с двумя фотонами соответствует фактор  $(-iV_{2\mu\nu})$  и т.д. Для удобства величинами  $V_{1\mu}, V_{2\mu\nu}, \dots$  обозначены соответствующие члены оператора взаимодействия без электромагнитных потенциалов  $A^\mu, A^\mu A^\nu, \dots$

Каждой внешней фермионной линии соответствует одна из функций. Решения с положительной энергией  $\Phi_0(x, p, s)$  соответствуют электронам, решения с отрицательной энергией  $X_0(x, p, s)$  – позитронам.

Остальные правила Фейнмана остаются такими же, как в спинорной электродинамике в дираковском представлении.

С учетом сформулированных правил Фейнмана рассмотрены некоторые процессы КЭД в первом и во втором порядке теории возмущений. Вычислены матричные элементы кулоновского рассеяния электронов, меллеровского рассеяния, комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары, а также матричные элементы для определения собственной энергии электрона, аномального магнитного момента электрона, лэмбовского сдвига атомных энергетических уровней.

На рис. 1 – 4 приведены диаграммы Фейнмана рассмотренных процессов.

# Расчеты процессов КЭД

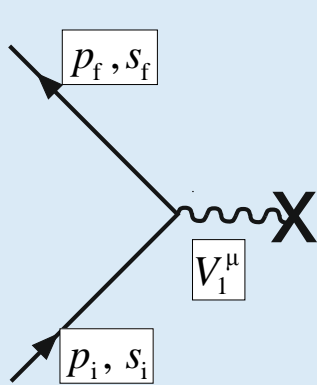


Рис. 1. Рассеяние электронов в кулоновском поле

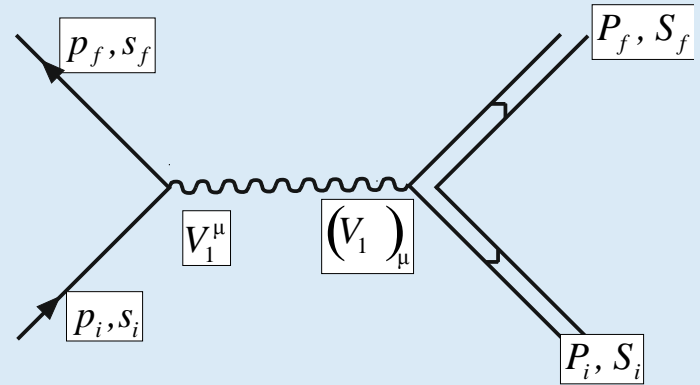


Рис. 2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

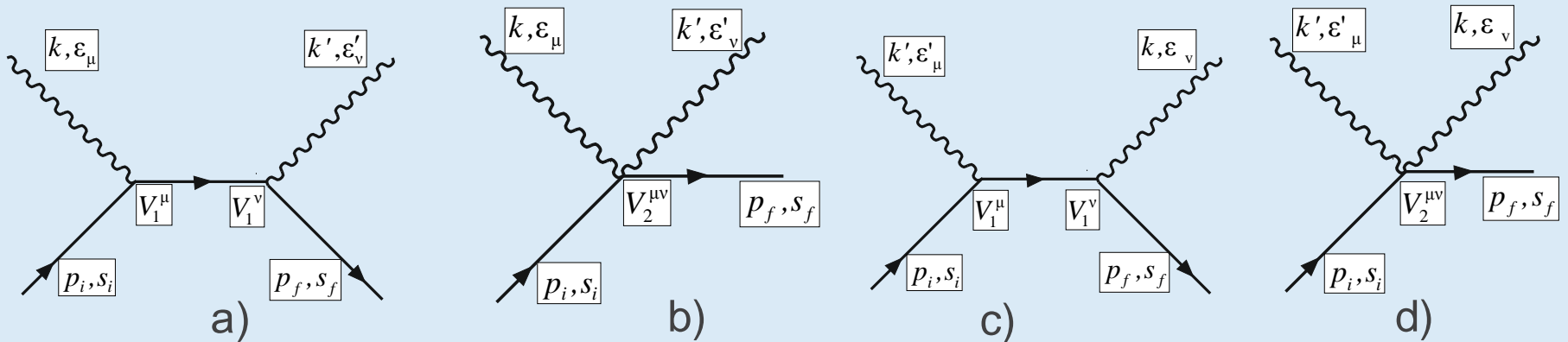


Рис. 3. Комптоновское рассеяние электронов

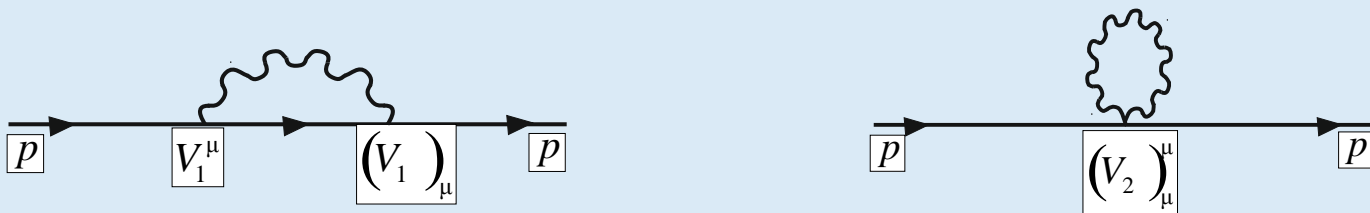


Рис. 4. Собственная энергия электрона

На рис. 5 представлены диаграммы для радиационных поправок к рассеянию электрона в кулоновском поле. Эти диаграммы необходимо учитывать при вычислениях аномального магнитного момента электрона и лэмбовского сдвига атомных энергетических уровней.

При проведении перенормировки массы электрона необходимо вычесть контрчлены, соответствующие диаграммам 5а – 5d с  $p' = p^{IV}$  и диаграммам 5е – 5h с  $p'' = p'''$ . В результате вклад диаграмм 5с, 5d, 5g, 5h зануляется. Вклад перенормированных диаграмм 5а, 5b, 5е, 5f конечен.

# Расчеты процессов КЭД

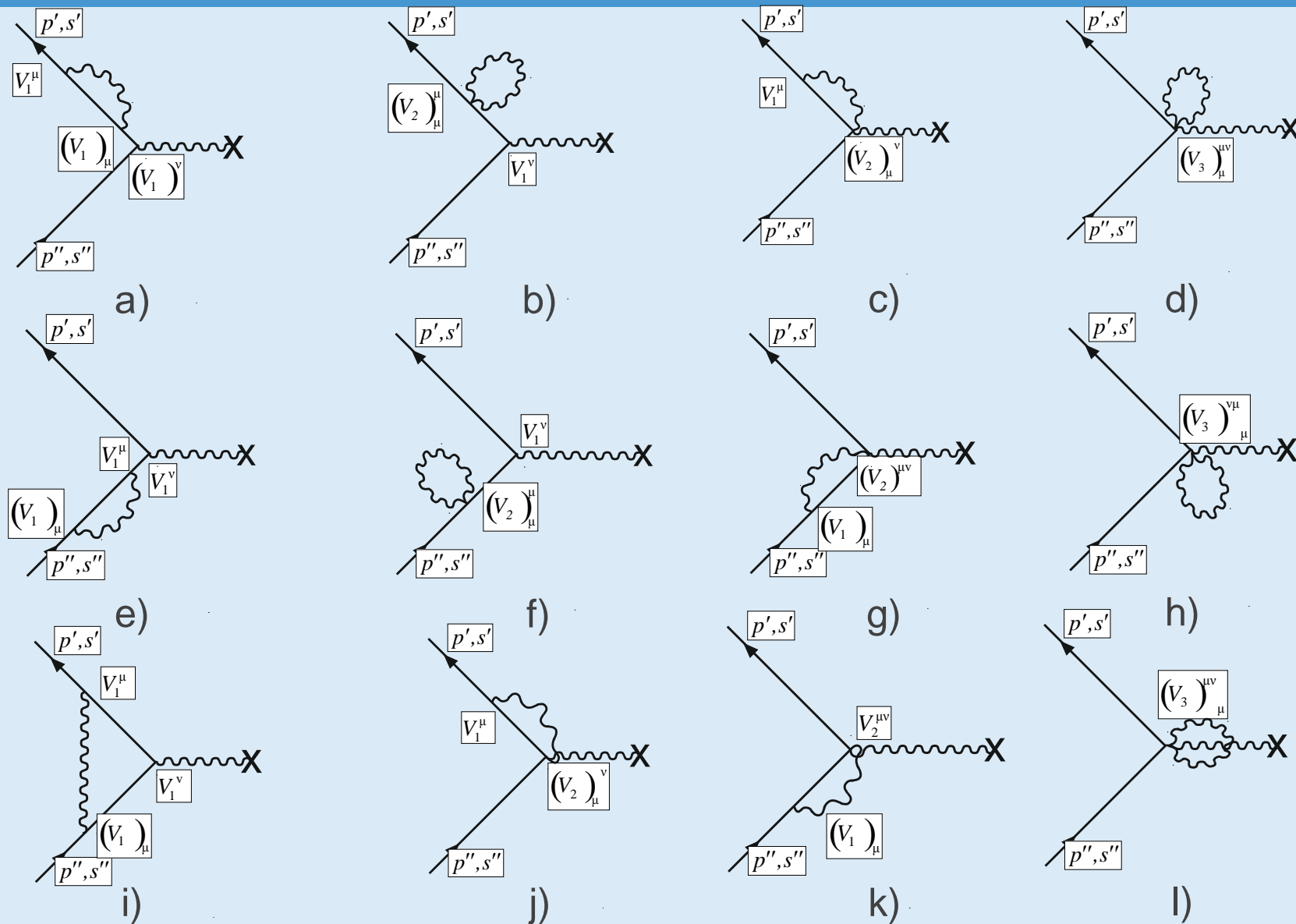


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

# Собственная энергия электрона

Диаграммы Фейнмана для определения собственной энергии электрона во втором порядке теории возмущений приведены на рис. 4.

Массовый оператор  $-i\Sigma^{(2)}(p)$  записывается в виде

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \left[ V_1^\mu(p', p''') \frac{1}{(p''')^2 - m^2} V_1^\mu(p''', p') + V_2^{\mu\mu}(p', p'') \right].$$

Здесь  $p''' = p' - k$ , для электрона  $I = \left( (p')^0 + m \right)^{1/2}$ ,  $III = \left( (p')^0 - k^0 + m \right)^{1/2}$ .

$$\begin{aligned} V_1^0(p', p''') &= (p')^0 + (p''')^0 - \frac{(\mathbf{p}')^2}{I(I+III)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'''}{I \cdot III} - \frac{(\mathbf{p}''')^2}{III(I+III)} = \\ &= 2(p')^0 - k^0 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{III(I+III)} - \frac{k^2}{III(I+III)} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}}{I \cdot III}, \end{aligned}$$

$$V_1^i(p', p''') = -\frac{III}{I} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}' \sigma^i - \frac{I}{III} \sigma^i (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}' - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}),$$



# Собственная энергия электрона

$$V_1^0(p''', p') = 2(p')^0 - k^0 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{III(I+III)} - \frac{k^2}{III(I+III)} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'}{I \cdot III},$$

$$V_1^i(p''', p') = -\frac{I}{III}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}' - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})\sigma^i - \frac{III}{I}\sigma^i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'.$$

$$V_2^{00} = -1 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{I \cdot III(I+III)^2} + \frac{k^2}{III^2(I+III)^2},$$

$$V_2^{ik} = \frac{I^2}{III^2}\sigma^i\sigma^k.$$

В результате получаем

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{pk + m^2}{k^2 (p-k)^2 - m^2}.$$

# Аномальный магнитный момент электрона

Диаграммы Фейнмана, необходимые для вычисления поправок к магнитному моменту электрона во втором порядке теории возмущений, приведены на рис. 5.

В рассматриваемом процессе статические потенциалы  $A^i(\mathbf{x}) \neq 0$ ,  $A^0(\mathbf{x}) = 0$ . Амплитуда процесса в первом порядке теории возмущений равна

$$-e \frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2 2E_i} \bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i}.$$

Обозначим  $L = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}$ .

Ниже будем рассматривать движение электрона в слабом магнитном поле и учитывать лишь слагаемые, пропорциональные  $p^i$  и  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{H}$  - магнитное поле. В наших обозначениях  $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}''$ ,  $\mathbf{p}''' = \mathbf{p}' - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}^{IV} = \mathbf{p}'' - \mathbf{k}$

$$q = p' - p'' = \begin{cases} q^0 = 0, (p')^0 = (p'')^0, \\ q^i = (p')^i - (p'')^i. \end{cases}$$

# Аномальный магнитный момент электрона

Рассмотрим вклад в аномальный магнитный момент диаграмм 5i, 5j, 5k, 5l. Для данного типа диаграмм выполняется равенство  $III=IV$ . Амплитуду процессов записываем в виде

$$-e \frac{i\delta(E' - E'')}{(2\pi)^2 2E''} \bar{U}_{s'} \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2} \Lambda^i(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') A_{\mathbf{p}' - \mathbf{p}''}^i \right| \mathbf{p}'' \right\rangle > U_{s''}.$$

# Аномальный магнитный момент электрона

## Вклад диаграммы 5i

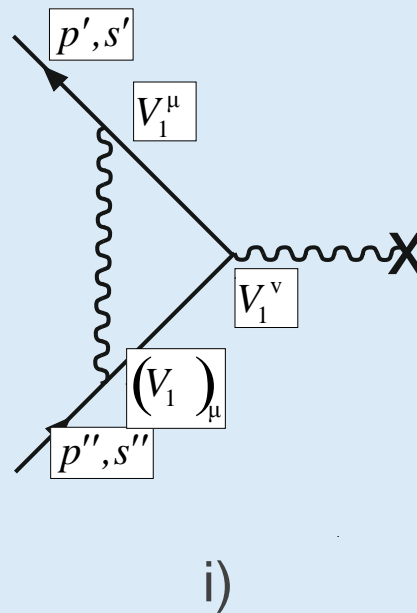


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

# Аномальный магнитный момент электрона

## Вклад диаграммы 5i

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5i} &= \left[ V_1^0(p', p''') V_1^i(p''', p^{IV}) A^i V_1^0(p^{IV}, p'') - \right. \\
 &\quad \left. - V_1^l(p', p''') V_1^i(p''', p^{IV}) A^i V_1^l(p^{IV}, p'') \right] \frac{1}{((p''')^2 - m^2)((p^{IV})^2 - m^2)} = \\
 &= \left\{ - \left( 2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I + III)} \right)^2 L - \left[ \left( 2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I + III)} \right) \frac{1}{I \cdot III} + 1 \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times 2\mathbf{k}\Lambda (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'') - \frac{I^2}{III^2} \mathbf{k}^2 L + \frac{I^2}{III^2} \left[ (2\mathbf{p}'\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\Lambda + (2\mathbf{p}''\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\Lambda\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} \right] \right\} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\left[ (2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2 \right]^2}.
 \end{aligned}$$

# Аномальный магнитный момент электрона

## Вклад диаграмм 5i, 5j, 5k, 5l

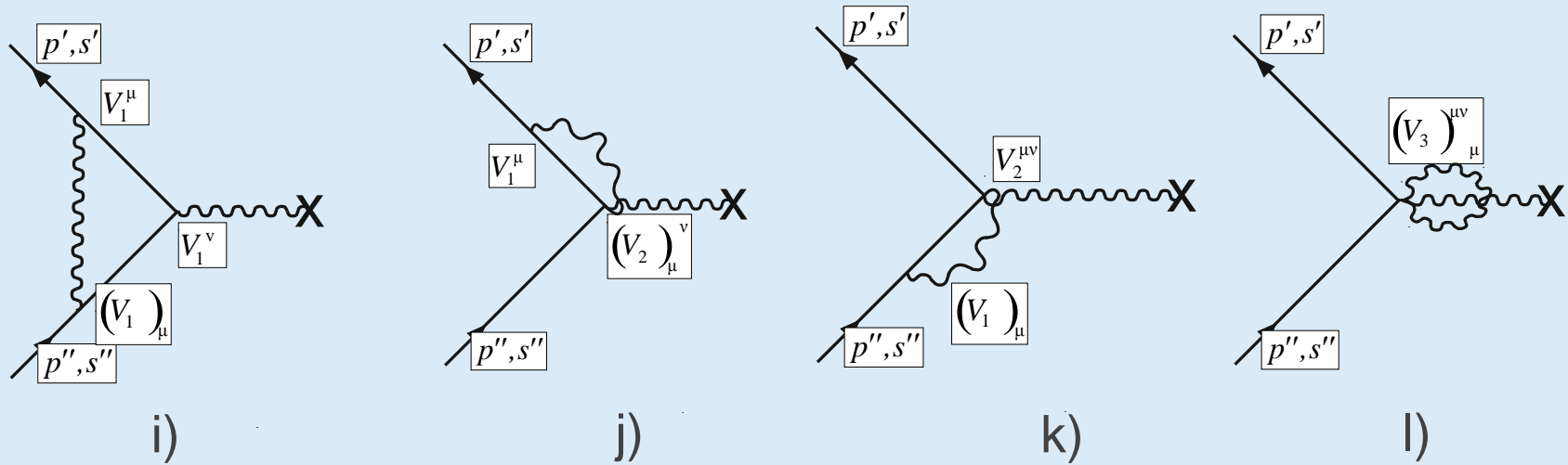


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

# Аномальный магнитный момент электрона

## Вклад диаграмм 5l, 5j, 5k, 5i

$$\left(\Lambda^i A^i\right)_{5i+5j+5k+5l} = - \frac{\left(2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2 - 8mk^0 + 4m^2\right)L + 4\mathbf{k}\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'')}{\left[(2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2\right]^2}.$$

Выражение совпадает с вкладом единственной диаграммы 5i с вершинами  $-ie\gamma^\mu$  в дираковском представлении.

# Аномальный магнитный момент электрона

## Вклады собственно-энергетических диаграмм

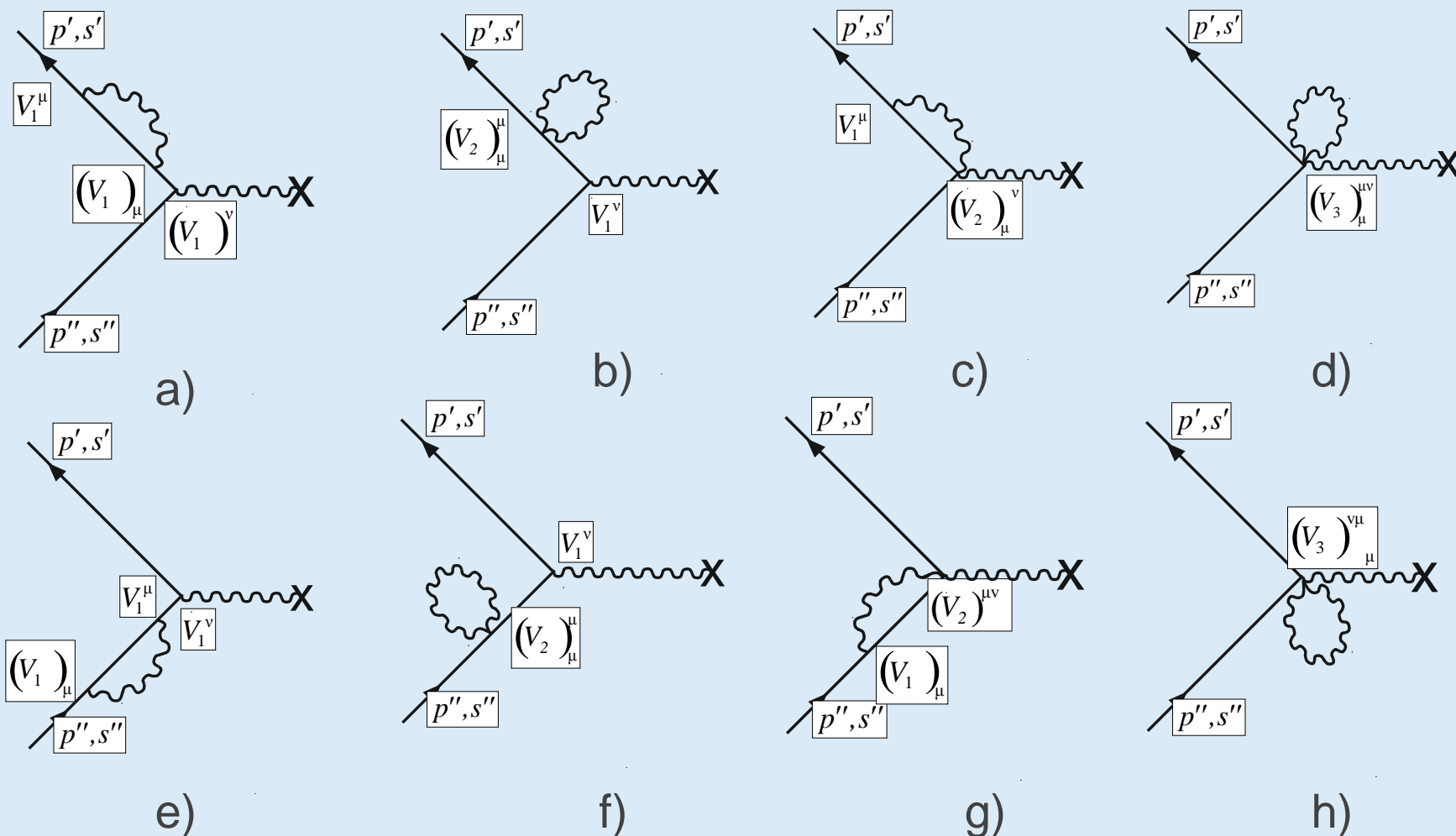


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле



# Аномальный магнитный момент электрона

Вклады диаграмм 5с, 5d, 5g, 5h после перенормировки массы полностью компенсируются соответствующими массовыми контрчленами.

Вклады диаграмм 5а, 5b, 5е, 5f после использования предельного процесса Гайтлера для сингулярных знаменателей  $\mathcal{P}/((p')^2 - m^2)$  конечны и равны

$$\left(\Lambda^i A^i\right)_{SE} = 2 \frac{2m^2 - 2mk^0 - (k^0)^2 - \mathbf{k}^2}{\left(-2mk^0 + (k^0)^2 - \mathbf{k}^2\right)^2} L.$$

Общий вклад всех перенормированных диаграмм 5а – 5l равен

$$\left(\Lambda^i A^i\right)_{amm} = \frac{\left(4m^2 - 4mk^0 - 2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2\right)L - 4\mathbf{k}\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'')}{\left(-2mk^0 + (k^0)^2 - \mathbf{k}^2\right)^2}.$$

Выражение совпадает с аналогичным выражением в дираковском представлении.

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

В рассматриваемом процессе статические электромагнитные потенциалы  $A^i(\mathbf{x}) = 0$ .  $A^0(\mathbf{x}) = Ze/4\pi|\mathbf{x}|$  - кулоновский потенциал атомного ядра с порядковым номером  $Z$ .

Амплитуда процесса в первом порядке теории возмущений равна

$$S_{fi} = -e \frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2 2E_i} A^0(\mathbf{q}) \bar{U}_{S_f} \left\langle \mathbf{p}_f \left| E_i + m + \frac{1}{E_i + m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i \right| \mathbf{p}_i \right\rangle U_{S_i}.$$

Здесь  $A^0(\mathbf{q}) = Ze/(\mathbf{q}^2)$ .

В наших обозначениях  $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}''$ ,  $\mathbf{p}''' = \mathbf{p}' - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}^{IV} = \mathbf{p}'' - \mathbf{k}$ .

$$q = p' - p'' = \begin{cases} q^0 = 0, (p')^0 = (p'')^0, \\ q^i = (p')^i - (p'')^i. \end{cases}$$

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

Рассмотрим движение электрона в кулоновском поле в нерелятивистском приближении с учетом слагаемых вплоть до  $(\mathbf{p}')^2, (\mathbf{p}'')^2$ .

Амплитуду процессов записываем в виде

$$-e \frac{i\delta(E' - E'')}{(2\pi)^2 2E''} \bar{U}_{s'} \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2} \Lambda^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') A^0(\mathbf{q}) \right| \mathbf{p}'' \right\rangle U_{s''}.$$

Рассмотрим вклад в лэмбовский сдвиг диаграмм 5i, 5j, 5k, 5l (см. рис. 5). Для данного типа диаграмм выполняется равенство III=IV.

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

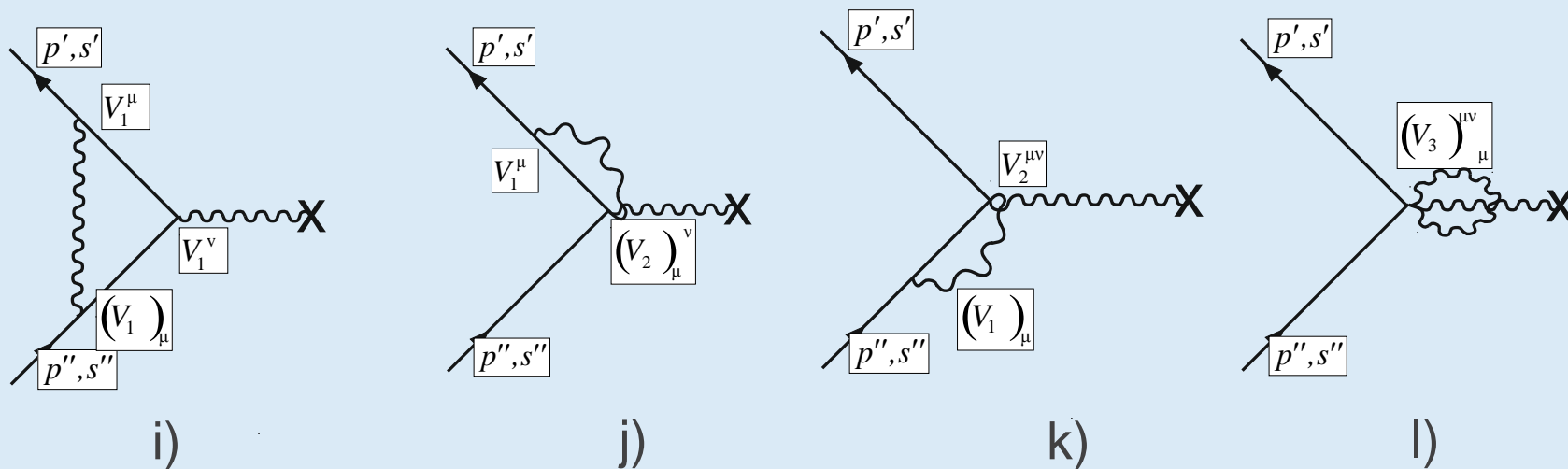


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

В результате вычислений

$$\begin{aligned} (\Lambda^0 A^0)_{5i+5j+5k+5l} = & 2m \left[ 4m^2 - 2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2 - 4mk^0 - \right. \\ & - \frac{k^2 + (k^0)^2 + 2mk^0 - 10m^2}{4m^2} \left( (\mathbf{p}')^2 + (\mathbf{p}'')^2 \right) - 4\mathbf{p}'\mathbf{p}'' + 4(\mathbf{p}'\mathbf{k} + \mathbf{p}''\mathbf{k}) + \\ & \left. + \left( \frac{2k^0}{m} - 4 \right) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'') + \frac{1}{4m^2} \left( 4m^2 - 2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2 - 4mk^0 \right) \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'' \right]. \end{aligned}$$

В стандартной КЭД аналогичный вклад в лэмбовский сдвиг вносит единственная диаграмма 5i с вершинами  $-ie\gamma^\mu$ .

Суммарный вклад собственно-энергетических диаграмм 5a – 5h в лэмбовский сдвиг совпадает с аналогичным вкладом диаграмм в стандартной КЭД с вершинами  $-ie\gamma^\mu$ .

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

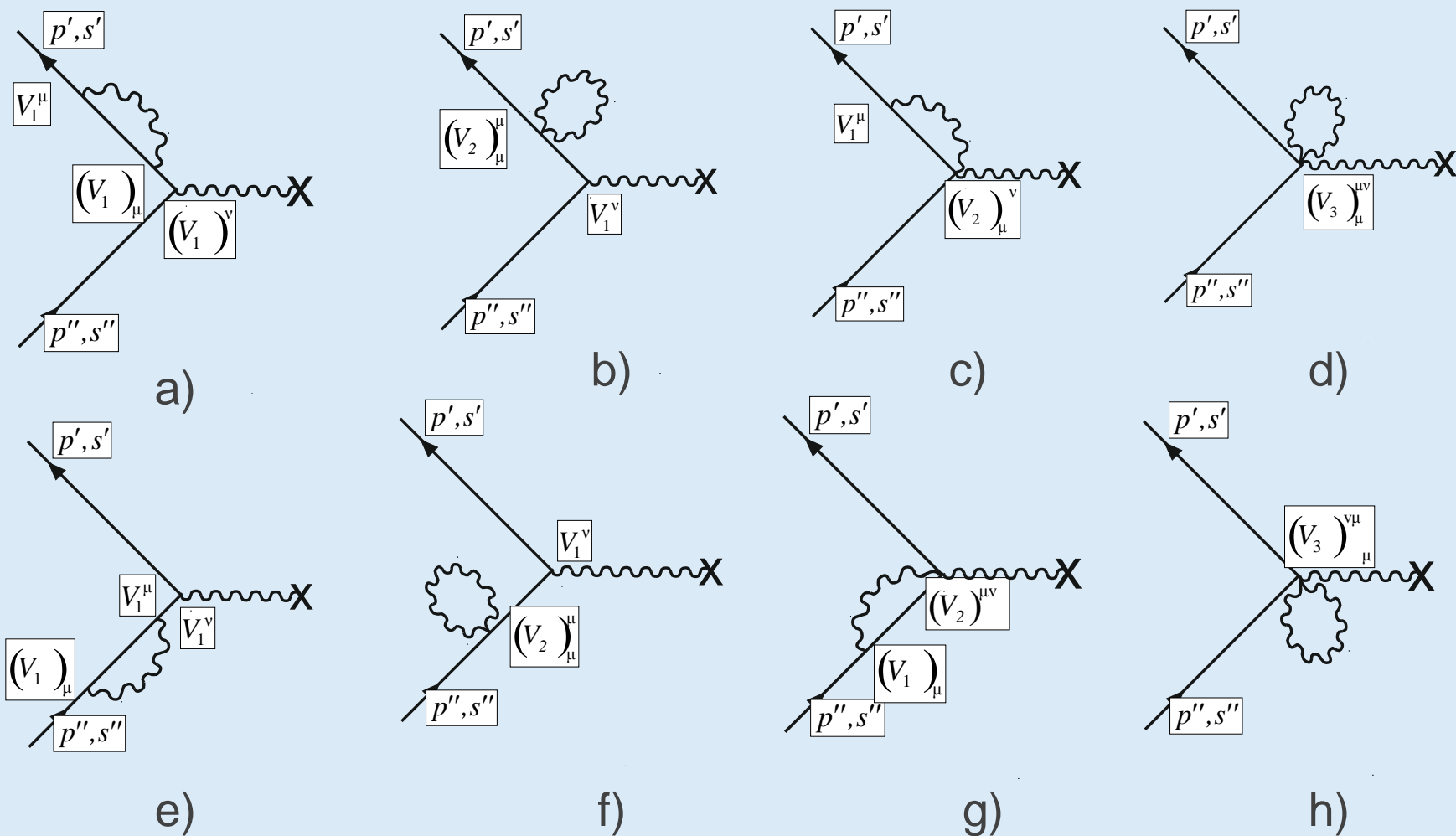


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

# Лэмбовский сдвиг энергетических уровней атомных электронов

## Вклад диаграммы 5i

$$\left\{ A_1 B_1 C_1 + B_1 C_1 \frac{(\mathbf{p}')^2 - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k}}{I \cdot III} + A_1 C_1 \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k} - \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}'' + \mathbf{k}^2}{III^2} + A_1 B_1 \frac{(\mathbf{p}'')^2 - \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}''}{I \cdot III} + \right.$$

$$+ C_1 \frac{(\mathbf{p}')^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{I \cdot III^3} (\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k}) + B_1 \frac{\mathbf{k}^2}{I^2 \cdot III^2} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' + A_1 \frac{(\mathbf{p}'')^2 - 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{I \cdot III^3} (\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' - \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}'') +$$

$$+ \frac{\mathbf{k}^4}{I^2 \cdot III^2} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' + B_1 (\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k}) - B_1 \frac{I^2}{III^2} (-\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' + \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}'' + \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k} + 3\mathbf{k}^2 + 4\mathbf{p}' \mathbf{p}'' - 4\mathbf{p}' \mathbf{k} - 4\mathbf{p}'' \mathbf{k}) -$$

$$- \frac{3III^2}{I^2} B_1 \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' + B_1 (\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' - \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}'') + \frac{(\mathbf{p}'')^2 - 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{III^2} ((\mathbf{p}')^2 - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{k}) -$$

$$\left. - \frac{3I^2}{III^4} ((\mathbf{p}')^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2) ((\mathbf{p}'')^2 - 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2) - \frac{3\mathbf{k}^2}{I^2} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}'' + \frac{(\mathbf{p}')^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{III^2} ((\mathbf{p}'')^2 - \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{p}'') \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\left( (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - 2(\mathbf{p}')^0 k^0 + 2\mathbf{p}' \mathbf{k} \right) \left( (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - 2(\mathbf{p}'')^0 k^0 + 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} \right)},$$

$$A_1 = I^2 + III^2 - 2m - \frac{(\mathbf{p}')^2}{I(I + III)} - \frac{(\mathbf{p}')^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{III(I + III)},$$

$$C_1 = I^2 + III^2 - 2m - \frac{(\mathbf{p}'')^2}{I(I + III)} - \frac{(\mathbf{p}'')^2 - 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{III(I + III)},$$

$$B_1 = 2III^2 - 2m - \frac{(\mathbf{p}')^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{2III^2} - \frac{(\mathbf{p}'')^2 - 2\mathbf{p}'' \mathbf{k} + \mathbf{k}^2}{2III^2}.$$

# Физический вакуум теории. Отсутствие поляризации вакуума

В стандартной КЭД поляризация вакуума во втором порядке теории возмущений определяется диаграммой с замкнутой электрон-позитронной петлей.

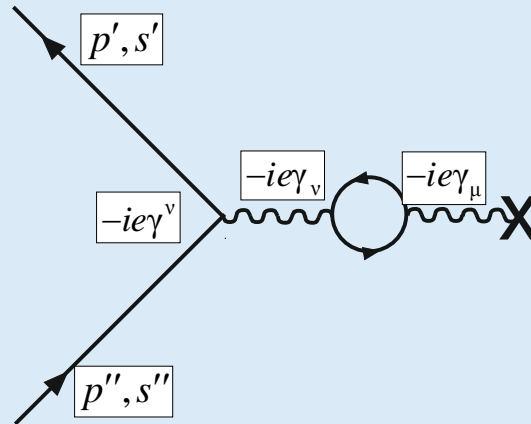


Рис. 6. Поляризация вакуума

Учет диаграммы рис. 6 приводит в атоме водорода к сдвигу уровня  $2S_{1/2}$  относительно уровня  $2P_{1/2}$  на  $-27\text{МГц}$ .



# Физический вакуум теории. Отсутствие поляризации вакуума

В рассматриваемой КЭД отсутствуют операторы, связывающие решения с положительной и отрицательной энергиями. Уравнения для электронов и уравнения для позитронов не связаны друг с другом. Диаграммы с замкнутыми электрон-позитронными петлями отсутствуют в рассматриваемой теории. Физический вакуум теории представляет собой полностью незанятые состояния с положительной энергией и с положительным знаком перед массовыми членами, а также полностью незанятые состояния с отрицательной энергией и со знаком минус перед слагаемыми с массой позитрона. В теории отсутствуют переходы между состояниями с положительной и отрицательной энергиями. Для рассматриваемой теории возникает вопрос: можно ли без поляризации вакуума получить часть лэмбовского сдвига, равную  $\Delta \nu \approx -27 \text{ МГц}$  ?

# Необходимость разработки эффективного кулоновского потенциала, учитывающего эффекты внутренней структуры электрона и протона

3. Необходимость разработки эффективного кулоновского потенциала, учитывающего эффекты внутренней структуры электрона и протона

*3.1 Потенциал Юлинга*

*3.2 Непроницаемый барьер в отталкивающем кулоновском поле. Связь спина и заряда фермиона*

*3.3 Фермион как частица метрики Керра-Ньюмена*

*3.4 Связь с экспериментами по изучению внутренней структуры электрона*

*3.5 Возможно ли согласование п.3.1 – 3.4?*

## 3.1 Потенциал Юлинга

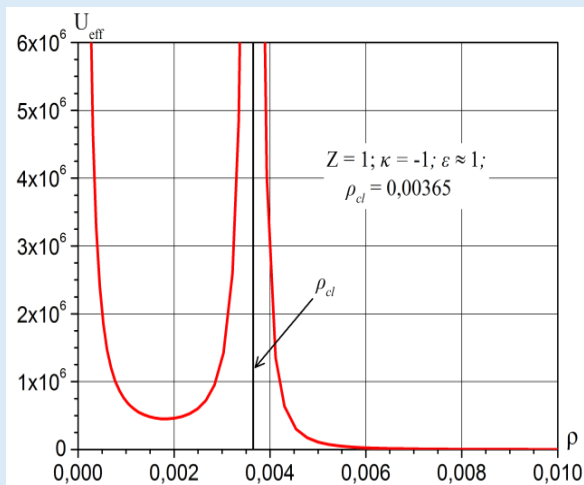
$$V(r) = -Ze^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{\alpha_{fs}}{15\pi m^2} 4\pi\delta(\mathbf{r}) \right) \text{— С.Швебер}$$

$$V(r) = \frac{e_1}{r} \left[ 1 + \frac{2\alpha_{fs}}{3\pi} \left( \ln \frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6} \right) \right], \quad r \ll \frac{1}{m}$$

$$V(r) = \frac{e_1}{r} \left( 1 + \frac{\alpha_{fs}}{4\sqrt{\pi} (mr)^{3/2}} e^{-2mr} \right), \quad r \gg \frac{1}{m}$$

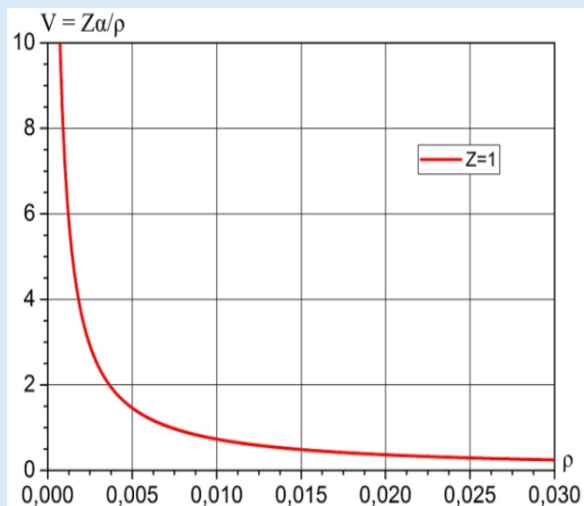
— В.Б.Берестецкий  
Е.М.Лифшиц  
Л.П.Питаевский

## 3.2 Непроницаемый барьер в отталкивающем кулоновском поле. Связь спина и заряда фермиона.



$$U_{eff} \Big|_{r \rightarrow r_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{(r - r_{cl})^2}; \quad r_{cl} = \frac{Z(e^2/mc^2)}{1 + (E/mc^2)}$$

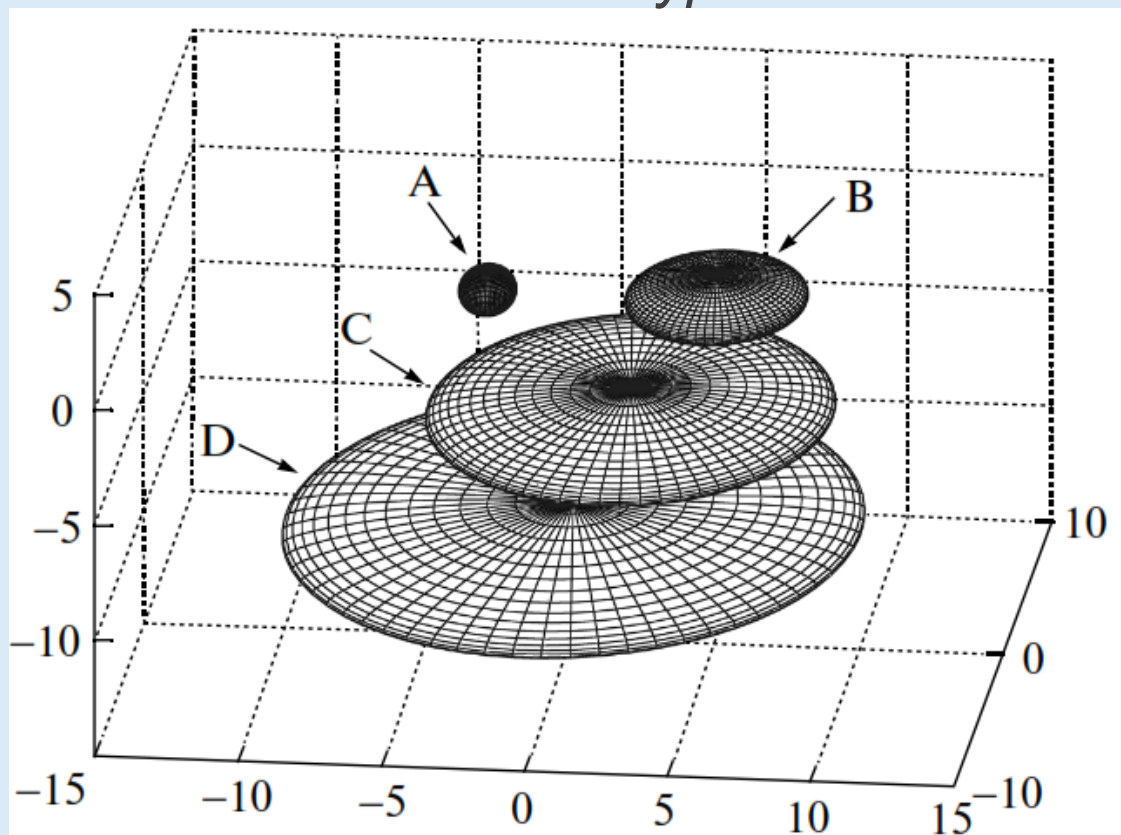
1. Для бесспиновых частиц непроницаемый барьер отсутствует.
2. При разноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского потенциала непроницаемый барьер отсутствует.
3. При одноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского потенциала непроницаемый барьер присутствует.



Из 1 – 3 видна качественная связь спина и заряда частицы.

## 3.3 Фермион как частица метрики Керра-Ньюмена

### 3.3.1 Модель А.Буринского



**Fig. 1.** Spherical bag with zero rotation,  $a/R = 0$  (A), and the rotating disk-like bags for different ratios  $a/R = 3$  (B), 7 (C), 10 (D)

## 3.3.2 Модель частицы в «zero-gravity Kerr-Newman spacetime»

$$G \rightarrow 0; \alpha_a \neq 0; \alpha_{em} \neq 0$$

$$J = k \frac{\hbar}{2}; a = \frac{J}{Mc} = \frac{k\hbar}{2Mc}; \alpha_a = \frac{1}{2} k \frac{m_e}{m_p};$$

## 3.4 Эксперименты по изучению внутренней структуры электрона

В экспериментах с электрон-позитронным рассеянием, проведенных в конце 20 века на ускорителе LEP (ЦЕРН), при энергии в системе центра масс  $E=200\text{ГэВ}$  внутренняя структура электронов и позитронов не проявляется при  $r_{\min} \approx 2 \cdot 10^{-18}\text{см}$  (см., например, *Gabrielse, Hanneke D., Kinoshita, et al. // Phys. Rev. Lett. 97, 030802 (2016)*).

# Необходимость разработки эффективного кулоновского потенциала, учитывающего эффекты внутренней структуры электрона и протона

*3.1 Потенциал Юлинга*

*3.2 Непроницаемый барьер в отталкивающем кулоновском поле. Связь спина и заряда фермиона*

*3.3 Фермион как частица метрики Керра-Ньюмена*

*3.4 Связь с экспериментами по изучению внутренней структуры электрона*

*3.5 Возможно ли согласование п.3.1 – 3.4?*



# Заключение

1. Для рассматриваемого варианта КЭД рассчитан ряд диаграмм Фейнмана. В низшем порядке теории возмущений вычислены матричные элементы кулоновского рассеяния электронов, рассеяния электрона на протоне (рассеяние Меллера), комптон эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары. Результаты расчетов совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в стандартной КЭД с использованием уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией.

2. Вычислена собственная энергия электрона с ультрафиолетовой логарифмической расходимостью, согласующаяся со значением, вычисленным в стандартной КЭД. Новым является отсутствие вклада в собственную энергию промежуточных состояний с отрицательной энергией. В стандартной КЭД в этом случае собственная энергия линейно расходится в ультрафиолетовом пределе. Только учет вклада промежуточных состояний с отрицательной энергией приводит к логарифмической ультрафиолетовой расходимости собственной энергии.

При вычислениях матричных элементов, связанных с аномальным магнитным моментом электрона и лэмбовским сдвигом, используются также лишь промежуточные состояния с положительной энергией.

# Заключение

3. Вычисленные величины матричных элементов для определения аномального магнитного момента электрона согласуются с матричными элементами, определенными в стандартной КЭД. Вклад в лэмбовский сдвиг диаграмм рис. 5а – 5l без учета поляризации вакуума совпадает с аналогичным вкладом соответствующих диаграмм в стандартной КЭД.

4. В рассматриваемой КЭД отсутствуют эффекты поляризации вакуума, так как в теории для фермионов отсутствуют операторы, связывающие решения с положительной и отрицательной энергиями. Уравнения для электронов и позитронов не связаны друг с другом. В теории отсутствуют диаграммы с замкнутыми электрон-позитронными петлями.

# Заключение

5. Физический вакуум теории представляет собой полностью незанятые состояния электрона с положительной энергией и с положительным знаком перед массовыми членами, а также полностью незанятые состояния позитрона с отрицательной энергией со знаком минус перед слагаемыми с массой позитрона. В теории отсутствуют переходы между состояниями с положительной и отрицательной энергиями.

6. В будущем недостающий вклад в лэмбовский сдвиг атома водорода  $\Delta\nu \approx -27\text{МГц}$  может быть обеспечен разработкой и введением в квантово-механические расчеты эффективного потенциала, учитывающего эффекты внутренней структуры электрона и протона.

**Спасибо за внимание**

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

## 1. Рассеяние электронов в кулоновском поле $A^0(x) = Ze/(4\pi|\mathbf{x}|)$

Диаграмма Фейнмана представлена на рис. 1.

Матричный элемент  $S_{fi}$  равен

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \bar{F}_0^+(x, p_f, s_f) V_{10} A^0 F_0^+(x, p_i, s_i) = \\ &= -\frac{i \delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2 2E_i} \bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | V_{10} A^0(q) | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i} = \\ &= i \frac{Ze^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \bar{U}_{s_f} \frac{1}{2E_i} \left( E_i + m + \frac{1}{E_i + m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i \right) U_{s_i}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ ,  $A^0(\mathbf{q}) = Ze/\mathbf{q}^2$ .

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

При записи  $S_{fi}$  для электрона использовалась функция  $F_0^+(x, p_i, s_i)$  и равенство  $U = (E_i + m)^{1/2}$ .

Выражение матричного элемента совпадает с выражением, полученным ранее в представлении Фолди-Ваутхайзена. Далее обычными методами с помощью матричного элемента  $S_{fi}$  можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в Резерфордское.

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

## 2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

Диаграмма Фейнмана представлена на рис. 2.

$$S_{fi} = -i \int d^4x d^4y \bar{F}_0^+(x, p_f, s_f) V_1^\alpha F_0^+(x, p_i, s_i) D_f(x-y) \times \\ \times \bar{F}^+(y, P_f, S_f) (-V_1)_\alpha F^+(y, P_i, S_i) = -\frac{i \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)}{(p_f - p_i)^2} \times \\ \times 2\pi \left( \bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | V_1^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i} \right) \left( \bar{U}_{S_f} \langle \mathbf{P}_f | (-V_1)_\alpha | \mathbf{P}_i \rangle U_{S_i} \right).$$

Выше  $D_f(x-y)$ - фотонный пропагатор. Матричный элемент  $S_{fi}$  позволяет определить меллеровское сечение рассеяния.

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

## 3. Комptonовское рассеяние электронов

Диаграммы Фейнмана представлены на рис. 3.

Падающий фотон с импульсом  $k^\mu$  и поляризацией  $\varepsilon^\mu$  будем описывать плоской волной

$$A^\mu(x, k) = \frac{\varepsilon^\mu}{\sqrt{2k^0 (2\pi)^3}} e^{-ikx}.$$

Испускаемый фотон с импульсом  $k'^\mu$  и поляризацией  $\varepsilon'^\mu$  описывается плоской волной

$$A^\mu(y, k') = \frac{(\varepsilon')^\mu}{\sqrt{2(k')^0 (2\pi)^3}} e^{ik'y}.$$



# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

Матричный элемент процесса равен

$$S_{fi} = -i\bar{U}_{s_f} \left\{ \int \frac{d^4 z d^4 y d^4 p'''}{(2\pi)^{10} \sqrt{2k^0 2(k')^0 2p_i^0 2p_f^0}} \left( e^{ip_f y} V_{1\mu} \varepsilon'^{\mu} e^{ik' y} \frac{e^{-ip''' y}}{(p''')^2 - m^2} e^{ip''' z} V_{1\mu} \varepsilon^{\nu} e^{-ikz} e^{ip_i z} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{ip_f y} V_{1\mu} \varepsilon^{\mu} e^{-iky} \frac{e^{-ip''' y}}{(p''')^2 - m^2} e^{ip''' z} V_{1\nu} \varepsilon'^{\nu} e^{ik' z} e^{-ip_i z} \right) + \int d^4 y \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{2k^0 2(k')^0 2E_i 2E_f}} \times \right. \\ \left. \times \left( e^{ip_f y} V_{2\mu\nu} \varepsilon'^{\mu} e^{ik' y} \varepsilon^{\nu} e^{-iky} e^{-ip_i y} + e^{ip_f y} V_{2\mu\nu} \varepsilon^{\mu} e^{-iky} \varepsilon'^{\nu} e^{ik' y} e^{-ip_i y} \right) \right\} U_{s_i} = \\ = -\frac{i\delta^4(p_i + k - p_f - k')}{(2\pi)^2 \sqrt{2k^0 2(k')^0 2p_i^0 2p_f^0}} (\bar{U}_{s_f} M U_{s_i}),$$

где

$$M = V_{1\mu} (p_f; p_i + k) \varepsilon'^{\mu} \frac{1}{(p_i + k)^2 - m^2} V_{1\mu} (p_i + k; p_i) \varepsilon^{\mu} + V_{2\mu\nu} (p_f; p_i + k; p_i) \varepsilon'^{\mu} \varepsilon^{\nu} + \\ + V_{1\mu} (p_f; p_i - k') \varepsilon^{\mu} \frac{1}{(p_i - k')^2 - m^2} V_{1\mu} (p_i - k'; p_i) \varepsilon'^{\mu} + V_{2\mu\nu} (p_f; p_i - k'; p_i) \varepsilon^{\mu} \varepsilon'^{\nu}.$$

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

Здесь операторы  $V_{1\mu}, V_{2\nu}$  определяются с учетом закона сохранения энергии-импульса ( $p_i + k = p_f - k'$ ), взятых без полей  $A^\mu, A^\mu A^\nu$ .

Если выбрать специальную калибровку, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета ( $\mathbf{p}_i = 0, p_i^0 = m, \varepsilon^0 = (\varepsilon')^0, \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{k} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{k}' = 0$ ), то выражение для  $S_{fi}$  упрощается:

$$M = e^2 \sqrt{\frac{2m + k^0 - (k')^0}{2m}} \cdot 2 \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2k^0(2m + k^0 - k^0)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(k')^0(2m + k^0 - k^{0'})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}'\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}' \right\}.$$

При получении последнего выражения использовались равенства

$$I \equiv \sqrt{2m + k^0 - (k')^0}, \quad II = \sqrt{2m}, \quad III \equiv \sqrt{2m + k^0}, \quad \text{либо} \quad III \equiv \sqrt{2m - (k')^0}, \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}' = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'' = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}''' = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}, \quad \text{либо} \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}''' = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}'.$$

Далее обычными методами можно получить формулу Клейна-Нишины-Тамма для дифференциального сечения комптоновского рассеяния.

# Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

## 4. Аннигиляция электрон-позитронной пары

Процессу аннигиляции электрон-позитронной пары соответствуют диаграммы рис. 3 с заменой  $\varepsilon, k \rightarrow \varepsilon_1, -k_1$ ;  $\varepsilon', k' \rightarrow \varepsilon_2, k_2$ ,  $p_i s_i \rightarrow p_- s_-$ ,  $p_f s_f \rightarrow p_+ s_+$ . При записи матричного элемента  $S_{+-}$  для позитрона используется функция  $F_0^-(x, p, s)$  и  $\Pi = (-p_+ - m)^{1/2}$ . По аналогии с комптоновским рассеянием матричный элемент процесса  $S_{+-}$  равен

$$S_{+-} = -\frac{\delta^4(p_- + p_+ - k_1 - k_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{2k_1^0 2k_2^0 \cdot 2p_-^0 2p_+^0}} \bar{U}_{s_+} M_1 U_{s_-},$$

где оператор  $M_1$  по своей структуре с учетом указанной выше замены совпадает с оператором  $M$  в выражении  $S_{fi}$  для комптоновского рассеяния электронов. Выражение для матричного элемента позволяет получить дифференциальное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары, которое совпадает с сечением этого процесса, вычисленным в представлении Дирака.