Развитие методов исследования эффектов больших глюонных плотностей в КХД

Грабовский Андрей Владимирович

ИЯФ СО РАН

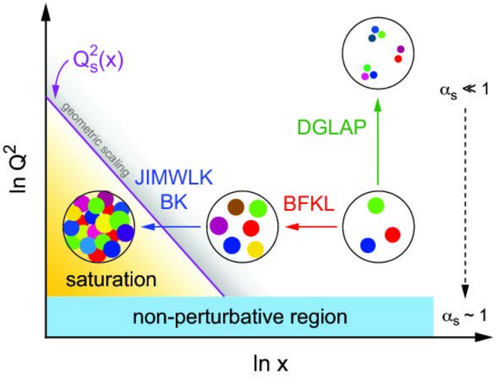
Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН

11 марта 2020 г.

Содержание

1. Режим больших глюонных плотностей
2. Задачи
    - Уравнения эволюции
    - Импакт факторы
    - Связь с подходом БФКЛ
3. Заключение

Режим больших глюонных плотностей



$$x = Q^2/s$$

Q — масштаб $p_\perp$

Момент насыщения

$$Q_s^2 \sim GeV^2 \frac{A^{1/3}}{x^\lambda}$$

геометрический скейлинг

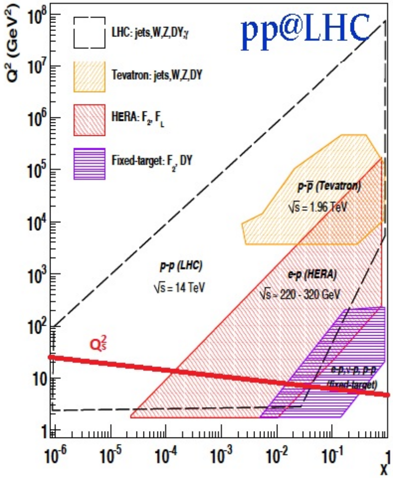
$$\sigma \sim \frac{f(Q_s/Q)}{Q^2}$$

HERA с протонами / RHIC с ядрами

$Q_s \sim 1 - 2GeV$

LHC $Q_s \sim 2 - 4GeV$

Режим больших глюонных плотностей



Момент насыщения

$$Q_s^2 \sim GeV^2 \frac{A^{1/3}}{x^\lambda}$$

$$x = Q^2/s$$

геометрический скейлинг

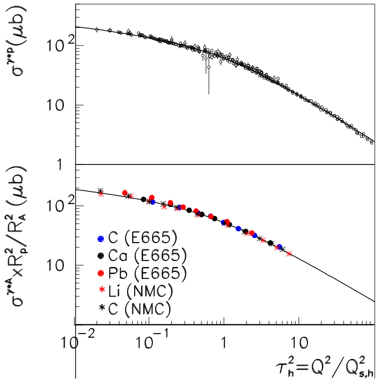
$$\sigma \sim \frac{f(Q_s/Q)}{Q^2}$$

HERA с протонами / RHIC с ядрами
$Q_s \sim 1 - 2GeV$

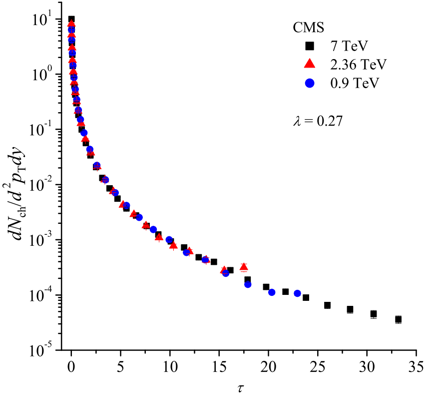
LHC $Q_s \sim 2 - 4GeV$

Геометрический скейлинг $\sigma \sim \frac{f(Q_s/Q)}{Q^2}$ $Q_s^2 \sim 0.4 GeV^2 \frac{A^{1/3}}{x^\lambda}$

HERA и неподвижная мишень



LHC

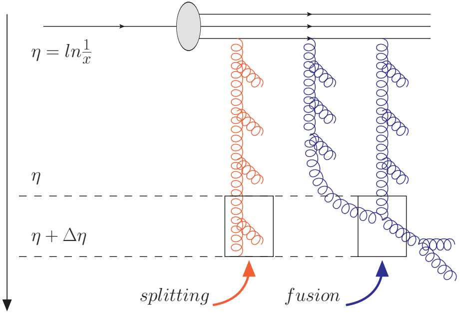


$x < 0.01, \quad 0.045 GeV^2 < Q^2 < 450 GeV^2$

$|\eta| < 2.4$

Г-Бернат Стасто Квичински 2001, МакЛерран Прашалович 2010 Албасете Арместо Милхано Сальгадо Видеманн 2005

Баланс процессов слияния - расщепления



вероятность испускания глюона

$P_1 \sim \alpha_s \frac{dx}{x}\frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2} \implies P_n \sim (\alpha_s ln\frac{1}{x})^n$

глюонные ф.р.: проинтегрированная xG

непроинтегрированная ϕ

$$xG(x,Q^2) = \int^{Q^2} d^2k\phi(x,k_\perp)$$

уравнение БФКЛ:

$$\frac{\partial\phi(x,k_\perp)}{\partial ln\frac{1}{x}} = K \otimes \phi(x,k_\perp) \implies \phi \sim x^\lambda, xG \sim x^\lambda$$

сечение процесса слияния глюонов $\sigma \sim \frac{\alpha_s}{Q^2}$

поперечная плотность глюонов $\rho_{glue} \sim \frac{xG}{\pi R_h^2}$

$\implies$ насыщение $\rho_{glue}\sigma \sim 1$

$$Q_s^2 \sim \alpha_s \frac{xG}{\pi R_h^2} \sim Q_0^2 \frac{A^{1/3}}{x^\lambda}$$

уравнение ГЛР (ДЛА):

$$\frac{\partial^2 xG}{\partial ln\frac{1}{x}\partial lnQ^2} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi}xG - \frac{\alpha_s^2 N_c}{R_h^2 Q^2}[xG]^2$$

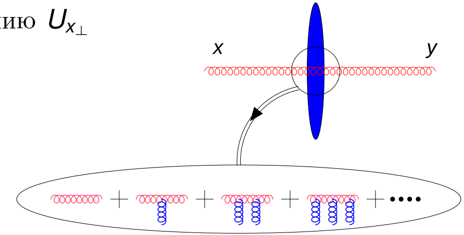
БФКЛ: Фадин Кураев Липатов 1975, Балицкий Липатов 1978, ГЛР: Грибов Левин Рыскин 1981, Мюллер Кью 1986

Вильсоновские линии в поле ударной волны

Эйкональное приближение — быстрая частица движется во внешнем поле мишени

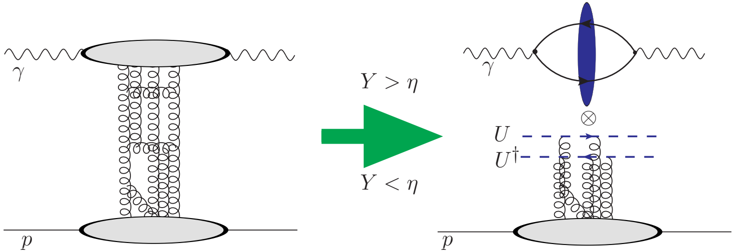
$$U_{x_\perp} = \mathcal{P} e^{ig\int_{-\infty}^{\infty} dz^+ \mathcal{A}^-(x_\perp, z^+)} = 1 + ig\int dz^+ \mathcal{A}^-(x_\perp, z^+) + \frac{(ig)^2}{2}\int dz^+ dz'^+ \mathcal{A}^-(x_\perp, z'^+)\mathcal{A}^-(x_\perp, z^+) + \dots$$

- взаимодействие факторизуется в вильсоновскую линию $U_{x_\perp}$
- калибровочно инвариантные степени свободы – корреляторы вильсоновских линий $tr[U_{x\perp} U^\dagger_{y_\perp}]\dots$
- внешнее поле быстрой частицы $\sim \delta^{\mu -}\delta(x^+)\mathcal{A}(x_\perp)$
- пропагаторы во внешнем поле $\sim D(x^+ < 0) \otimes U_{x_\perp} \otimes D(x^+ > 0)$



Балицкий 1996

Структура амплитуды: высокоэнергетическое операторное разложение (ВЭОР)



$$\sigma_{\gamma^* p} \sim \int dr_1 dr_2 \Phi^{\eta}_{\gamma^*}(r_1, r_2) \langle p | N_c - tr(U_{r_1} U^{\dagger}_{r_2})^{\eta} | p \rangle$$

Φ_{γ^*} — импакт фактор

$tr(U_1 U_2^\dagger)$ — дипольный оператор

η — масштаб разделения быстрот

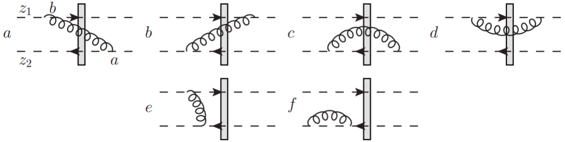
глюоны с $p^+ > p^+_\gamma e^\eta$ в импакт факторе

глюоны с $p^+ < p^+_\gamma e^\eta$ в вильсоновских линиях.

Балицкий 1996

Уравнение Балицкого - Ковчегова

$$U_{\vec{z}}^{\eta} = \mathbf{P} e^{ig\int_{-\infty}^{+\infty} dz^+ \mathcal{A}_\eta^-(z^+,\vec{z})} \quad \mathcal{A}_\eta^- = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipz} \mathcal{A}^-(p)\,\theta(p_\gamma^+ e^\eta - p^+)$$



$$\frac{\partial tr(U_1 U_2^\dagger)}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \int d\vec{z}_4 \frac{\vec{z}_{12}^{\,2}}{\vec{z}_{14}^{\,2}\vec{z}_{42}^{\,2}} \left[tr(U_1 U_4^\dagger) tr(U_4 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger) \right].$$

Иерархия уравнений Балицкого — уравнения для $\frac{\partial U_i^j}{\partial \eta}, \frac{\partial U_{1i}^j U_{2k}^l}{\partial \eta}, \frac{\partial U_{1i}^j U_{2k}^l U_{3h}^n}{\partial \eta} \ldots \sim$ JIMWLK

Балицкий 1996, Ковчегов 1999 СГЛП: Балицкий Кирилли 2007–2013

Уравнение Балицкого Ковчегова

$$\mathbf{U}_{12} = \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\left(U_1 U_2^\dagger\right) - 1$$

$$\frac{d\mathbf{U}_{12}}{d\eta} = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2}\int d\vec{z}_3 \frac{\vec{z}_{12}^{\,2}}{\vec{z}_{13}^{\,2}\vec{z}_{23}^{\,2}}\left[\mathbf{U}_{13} + \mathbf{U}_{32} - \mathbf{U}_{12} - \mathbf{U}_{13}\mathbf{U}_{32}\right]$$

Линейная часть — уравнение Балицкого-Фадина-Кураева-Липатова в мебиусовской форме

Нелинейная часть — насыщение

Фадин Кураев Липатов 1975, 1976, 1977, Балицкий Липатов 1978, Фадин Фиоре Папа 2007
СГЛП: Фадин Липатов 1998, Фадин Фиоре 2005
Балицкий 1996, Ковчегов 1999 СГЛП: Балицкий Кирилли 2007–2013

Для конкретного процесса в Реждевском пределе:

Структура ВЭОР

1. выбор вильсоновского оператора для наблюдаемой величины: $O[U] = tr(U_1 U_2^\dagger),\ tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger)\ \ldots$
2. построение уравнения эволюции для этого оператора $\frac{\partial O[U]}{\partial \eta} = \ldots$
3. решение этого уравнения с н. у. $\eta \sim \eta_{target}$ для $\eta \sim \eta_{projectile}$
4. вычисление жесткого матричного элемента - импакт фактора $\Phi^{\eta_{projectile}}$
5. свертка импакт фактора и матр. элемента вильсоновского оператора

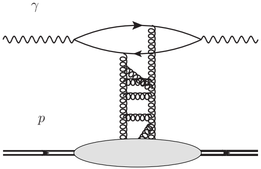
$$\boxed{iM_{fi} \sim \Phi^{\eta_{projectile}} \otimes \langle h' | O[U]^{\eta_{projectile}} | h \rangle}$$

Задачи

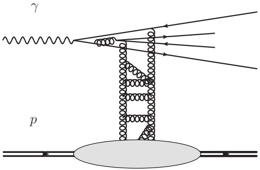
1. выбор оператора для процесса
2. построение уравнений эволюции в ГЛП, СГЛП
3. решение уравнений эволюции
4. вычисление импакт факторов ГП, СГП
5. сборка сечений
6. сравнение с экспериментальными данными и результатами других подходов

Правильно ли КЦС описывает физику больших глюонных плотностей?

Выбор оператора. Примеры.

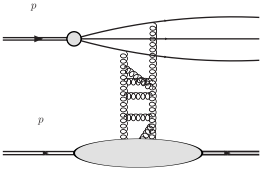


$tr(U_1 U_2^\dagger)$

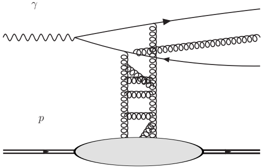


$tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger)$

$tr(U_1 U_2^\dagger) tr(U_3 U_4^\dagger)$



$U_1 \cdot U_2 \cdot U_3$



$tr(U_1 U_2^\dagger)$

$tr(U_1 U_2^\dagger) tr(U_3 U_2^\dagger)$

Построение уравнений эволюции

- ГЛП: $\frac{\partial U^i_j}{\partial\eta} = \alpha_s \hat{K} U^i_j$, $\frac{\partial U^i_j U^k_l}{\partial\eta} = \alpha_s \hat{K} U^i_j U^k_l$, $\frac{\partial tr(U_1 U_2^\dagger)}{\partial\eta} = \alpha_s \hat{K} tr(U_1 U_2^\dagger)$ Балицкий 96

  Барионная вильсоновская петля (БВП): $B_{123} = \varepsilon^{i'j'h'} \varepsilon_{ijh} U^i_{z_1 i'} U^j_{z_2 j'} U^h_{z_3 h'} = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3$

  уравнение для B не замкнуто Прашалович Ростворовский 98
  линейное уравнение, C-нечетная часть Хатта Янку Итакура МакЛерран 2005

  получено уравнение эволюции для B в замкнутом виде Герасимов АГ 2012

  ↳ все нелинейные поправки к уравнению эволюции для оддерона

  ↳ описание бариона в рамках ВЭОР в разреженном режиме

- СГЛП: $\frac{\partial tr(U_1 U_2^\dagger)}{\partial\eta} = (\alpha_s \hat{K} + \alpha_s^2 \hat{K}_1) tr(U_1 U_2^\dagger)$ Балицкий Кирилли 2007-2010

  $\frac{\partial U^i_j U^k_l U^m_n}{\partial\eta} = \alpha_s^2 \hat{K}_1 U^i_j U^k_l U^m_n$ АГ 2013

  $\frac{\partial U^i_j}{\partial\eta} = (\alpha_s \hat{K} + \alpha_s^2 \hat{K}_1) U^i_j$, $\frac{\partial U^i_j U^k_l}{\partial\eta} = (\alpha_s \hat{K} + \alpha_s^2 \hat{K}_1) U^i_j U^k_l$ Балицкий Кирилли 2013

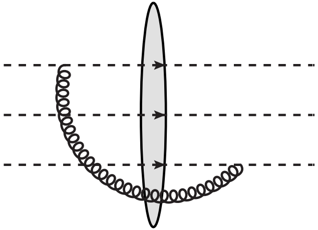
  полная иерархия в СГЛП

  ↳ гамильтониан JIMWLK Ковнер Люблинский Мюлиан 2014

  ↳ уравнение для барионной вильсоновской петли Балицкий АГ 2014

  ↳ уравнения для $tr(U_1 U_2^\dagger) tr(U_3 U_4^\dagger)$ и $tr(U_1 U_2^\dagger U_3 U_4^\dagger)$ АГ 2015

Эволюция барионной вильсоновской петли



$$\frac{\partial B^{\eta}_{123}}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2}\int d\vec{z}_4\left[\frac{\vec{z}_{12}^{\,2}}{\vec{z}_{41}^{\,2}\vec{z}_{42}^{\,2}}(-B^{\eta}_{123}+\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}(B^{\eta}_{144}B^{\eta}_{324} + B^{\eta}_{244}B^{\eta}_{314} - B^{\eta}_{344}B^{\eta}_{214})) + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3)\right].$$

В пределе больших N_c $\langle B^{\eta}_{144}B^{\eta}_{324}\rangle \to \langle B^{\eta}_{144}\rangle\langle B^{\eta}_{324}\rangle$ уравнение имеет замкнутый вид

C-четная часть — Померон

Строим C-четную и C-нечетную функции с помощью антибарионного оператора $B^{\eta}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = U_1^{\dagger} \cdot U_2^{\dagger} \cdot U_3^{\dagger}$

$$B^{+}_{123} = B^{\eta}_{123} + B^{\eta}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} - 12, \quad B^{-}_{123} = B^{\eta}_{123} - B^{\eta}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}$$

$$B^{+}_{123} = \frac{1}{2}(B^{+}_{133} + B^{+}_{211} + B^{+}_{322}) + \tilde{B}^{+}_{123},$$

где $\tilde{B}^{+}_{123}$ стартует с 4-глюонного обмена. В SU(3)

$$B_{iij} = 2tr(U_j U_i^{\dagger})$$

$\implies$ B^{+}_{123} распадается на 3 C-четных дипольных функции Грина и поправку СГП.

C-нечетная часть — оддерон

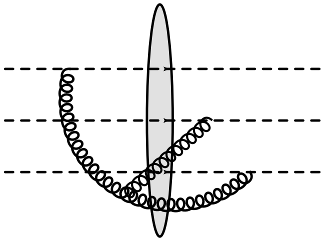
$$\frac{\partial B^-_{123}}{\partial\eta} = \frac{\alpha_s 3}{4\pi^2}\int d\vec{z}_4 \frac{\vec{z}_{12}^{\,2}}{\vec{z}_{14}^{\,2}\vec{z}_{42}^{\,2}}\Big[B^-_{423} + B^-_{143} - B^-_{123}$$

$$-B^-_{124} - B^-_{443} + B^-_{424} + B^-_{144} + \frac{1}{12}\left(B^+_{144}B^-_{324} + B^+_{244}B^-_{314} - B^+_{344}B^-_{214}\right)$$

$$+\frac{1}{12}\left(B^-_{144}B^+_{324} + B^-_{244}B^+_{314} - B^-_{344}B^+_{214}\right)\Big] + (2\leftrightarrow 3) + (1\leftrightarrow 3).$$

Линейная часть совпадает с уравнением эволюции для ф. Грина оддерона Хатта, Янку, Итакура, МакЛерран 2005, совпадающим с уравнением Бартельса-Квичинского-Прашаловича Б 1980, К П 1980.

Связная часть ядра в СГП



$$K_{NLO}^{conn} \otimes B_{123}^{\eta} = \frac{\alpha_s^2}{8\pi^3} \int d\vec{z}_0 \left[\frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} - \frac{(\vec{z}_{30}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{30}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} \right] \ln \frac{\vec{z}_{30}^{\,2}}{\vec{z}_{31}^{\,2}} \ln \frac{\vec{z}_{10}^{\,2}}{\vec{z}_{31}^{\,2}} (B_{100}B_{320} - B_{300}B_{210})$$

$$+ \frac{\alpha_s^2}{4\pi^4} \int d\vec{z}_0 d\vec{z}_4 \{ (U_2 U_0^{\dagger} U_1) \cdot U_4 \cdot (U_0 U_4^{\dagger} U_3) + (U_3 U_4^{\dagger} U_0) \cdot U_4 \cdot (U_1 U_0^{\dagger} U_2) - (1,4 \leftrightarrow 3,0) \}$$

$$\times \left[\frac{1}{2\vec{z}_{04}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{34})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{34}^{\,2}} + \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{40})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{40}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{24}\vec{z}_{34})}{\vec{z}_{24}^{\,2}\vec{z}_{34}^{\,2}} + \frac{(\vec{z}_{04}\vec{z}_{34})}{\vec{z}_{04}^{\,2}\vec{z}_{34}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{10}\vec{z}_{20})}{\vec{z}_{10}^{\,2}\vec{z}_{20}^{\,2}} - \frac{(\vec{z}_{20}\vec{z}_{10})}{\vec{z}_{02}^{\,2}\vec{z}_{01}^{\,2}} \frac{(\vec{z}_{24}\vec{z}_{34})}{\vec{z}_{24}^{\,2}\vec{z}_{34}^{\,2}} \right] \ln \frac{\vec{z}_{02}^{\,2}}{\vec{z}_{24}^{\,2}}$$

$$+(2 \leftrightarrow 1) + (2 \leftrightarrow 3).$$

Полное уравнение в СГП

Добавив вклад эволюции 2 вильсоновских линий из дипольного ядра в СГП
Балицкий Кирилли 2013

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{123}}{\partial \eta} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{8\pi^2}\int d\vec{r}_0 \Big[& (B_{100}B_{320} + B_{200}B_{310} - B_{300}B_{210} - 6B_{123}) \\
& \times \left\{ \frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}} - \frac{3\alpha_s}{4\pi}\beta \left[\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^{\,2}}{\vec{r}_{02}^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^{\,2}} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^{\,2}}\right) - \frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{\mu}^2}\right)\right]\right\} \\
& - \frac{\alpha_s}{\pi} \ln\frac{\vec{r}_{20}^{\,2}}{\vec{r}_{21}^{\,2}} \ln\frac{\vec{r}_{10}^{\,2}}{\vec{r}_{21}^{\,2}} \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{\vec{r}_{13}^{\,2}}{\vec{r}_{10}^{\,2}\vec{r}_{30}^{\,2}} - \frac{\vec{r}_{32}^{\,2}}{\vec{r}_{30}^{\,2}\vec{r}_{20}^{\,2}} \right] (B_{100}B_{320} - B_{200}B_{310}) \right. \\
& \left. - \frac{\vec{r}_{12}^{2}}{\vec{r}_{10}^{2}\vec{r}_{20}^{\,2}} \left(9B_{123} - \frac{1}{2}\left[2\left(B_{100}B_{320} + B_{200}B_{130}\right) - B_{300}B_{120}\right]\right)\right\} + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3)\Big] + \dots
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\beta \ln\frac{1}{\tilde{\mu}^2} = \left(\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\frac{n_f}{3}\right)\ln\left(\frac{\mu^2}{4e^{2\psi(1)}}\right) + \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{9}\frac{n_f}{3}.
$$

Полное уравнение в СГП

$$
-\frac{\alpha_s^2}{8\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_4 \ \Big[\{\tilde{L}_{12}\left(U_0 U_4{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_1 U_0{}^\dagger U_4\right)\cdot U_3
$$

$$
+L_{12}\Big[\left(U_0 U_4{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_1 U_0{}^\dagger U_4\right)\cdot U_3 + tr\left(U_0 U_4{}^\dagger\right)\left(U_1 U_0{}^\dagger U_2\right)\cdot U_3\cdot U_4
$$

$$
-\frac{3}{4}[B_{144}B_{234}+B_{244}B_{134}-B_{344}B_{124}]+\frac{1}{2}B_{123}\Big]
$$

$$
+(M_{13}-M_{12}-M_{23}+M_2^{13})\Big[\left(U_0 U_4{}^\dagger U_3\right)\cdot\left(U_2 U_0{}^\dagger U_1\right)\cdot U_4
$$

$$
+\left(U_1 U_0{}^\dagger U_2\right)\cdot\left(U_3 U_4{}^\dagger U_0\right)\cdot U_4\Big] + (\text{all 5 permutations } 1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3)\} + \ (0\leftrightarrow 4)\Big]
$$

$$
-\frac{\alpha_s^2 n_f}{16\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_4\Big[\Big\{\Big(\frac{1}{3}(U_1 U_0{}^\dagger U_4 + U_4 U_0{}^\dagger U_1)\cdot U_2\cdot U_3 - \frac{1}{9}B_{123}tr(U_0{}^\dagger U_4)
$$

$$
+(U_1 U_0{}^\dagger U_2)\cdot U_3\cdot U_4 + \frac{1}{6}B_{123} - \frac{1}{4}(B_{013}B_{002}+B_{001}B_{023}-B_{012}B_{003})
$$

$$
+ \ (1\leftrightarrow 2)\Big) + (0\leftrightarrow 4)\Big\} L_{12}^q + (1\leftrightarrow 3) + (2\leftrightarrow 3)\Big].
$$

Полное уравнение в СГП

Померонное ядро $L_{12}(0 \leftrightarrow 4) = L_{12}$

$$L_{12} = \left[\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2 - \vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2}\left(-\frac{\vec{r}_{12}{}^4}{8}\left(\frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} + \frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2}\right) + \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{04}{}^2} - \frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2 + \vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}{4\vec{r}_{04}{}^4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{8\vec{r}_{04}{}^2}\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}\right)\right]\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}{\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\right) + \frac{1}{2\vec{r}_{04}{}^4}.$$

$$L^q_{12} = \frac{1}{\vec{r}_{04}{}^4}\left\{\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2 + \vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2 - \vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{2(\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2 - \vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2)}\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}\right) - 1\right\}.$$

2-точечный вклад в оддеронное ядро $\tilde{L}_{12}(0 \leftrightarrow 4) = -\tilde{L}_{12}$

$$\tilde{L}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{8}\left[\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{14}{}^2}\right]\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}{\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}\right).$$

Новые структуры

$$M_{12} = \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{16}\left[\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{1}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{14}{}^2}\right]\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{02}{}^2}{\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{24}{}^2}\right).$$

$$M_2^{13} = \frac{1}{4\vec{r}_{01}{}^2\vec{r}_{34}{}^2}\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{\vec{r}_{14}{}^2\vec{r}_{23}{}^2}{\vec{r}_{04}{}^2\vec{r}_{24}{}^2} - \frac{\vec{r}_{03}{}^2\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{02}{}^2\vec{r}_{04}{}^2} + \frac{\vec{r}_{13}{}^2}{\vec{r}_{04}{}^2}\right)\ln\left(\frac{\vec{r}_{02}{}^2}{\vec{r}_{24}{}^2}\right).$$

Квазиконформное уравнение

Получено ядро уравнения эволюции в квазиконформном виде в базисе составных конформных операторов

Балицкий Кирилли 2009

$$O^{conf} = O + \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial \eta}\Bigg|_{\frac{\vec{r}_{mn}^{\,2}}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}} \to \frac{\vec{r}_{mn}^{\,2}}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{r}_{mn}^{\,2} a}{\vec{r}_{im}^{\,2}\vec{r}_{in}^{\,2}}\right)},$$

Составной конформный барионный оператор

$$B_{123}^{conf} = B_{123} + \frac{\alpha_s 3}{8\pi^2}\int d\vec{r}_4 \left[\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{41}^{\,2}\vec{r}_{42}^{\,2}} \ln\left(\frac{a\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{41}^{\,2}\vec{r}_{42}^{\,2}}\right)\right.$$

$$\times\left(-B_{123} + \frac{1}{6}(B_{144}B_{324} + B_{244}B_{314} - B_{344}B_{214})\right)$$

$$\left. +(1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3)\right].$$

Линеаризованное уравнение

Получено линеаризованное уравнение для B_{123}^{conf}.

Линеаризованное уравнение эволюции для C-нечетной части дипольного опреатора $B_{122}^{-} = 2tr(U_1 U_2^\dagger) - 2tr(U_1^\dagger U_2)$

$$\frac{\partial B_{122}^{-conf}}{\partial \eta} \stackrel{3g}{=} \frac{3\alpha_s\left(\mu^2\right)}{2\pi^2}\int d\vec{r}_0 (B_{100}^{-conf} + B_{220}^{-conf} - B_{122}^{-conf})$$
$$\times \left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}} - \frac{3\alpha_s}{4\pi}\beta\left[\ln\left(\frac{\vec{r}_{01}^{\,2}}{\vec{r}_{02}^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\vec{r}_{02}^{\,2}} - \frac{1}{\vec{r}_{01}^{\,2}}\right) - \frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\vec{r}_{01}^{\,2}\vec{r}_{02}^{\,2}}\ln\left(\frac{\vec{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{\mu}^2}\right)\right]\right)$$
$$- \frac{9\alpha_s^2}{2\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_4\; \tilde{L}_{12}^{C} B_{044}^{-} + \frac{27\alpha_s^2}{2\pi^2}\zeta(3)B_{122}^{-}$$
$$- \frac{\alpha_s^2 n_f}{12\pi^4}\int d\vec{r}_0 d\vec{r}_4 \{(2B_{014}^{-} - B_{001}^{-} - B_{144}^{-}) - (2B_{024}^{-} - B_{002}^{-} - B_{244}^{-})\}\, L_{12}^{q}.$$

содержит недипольные барионные операторы в кварковой части.

Решение уравнений эволюции

- линейное уравнение:

  решение уравнения БФКЛ в ГЛП для рассеяния на произвольный угол Липатов 1986
  решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед Ковчегов Кирилли 2013 АГ 2013
  ↳ полное сечение $\gamma^*\gamma^*$ рассеяния в СГЛП Ковчегов Кирилли 2014

- нелинейное уравнение:

  численное решение уравнения БК в ГЛП Маркет Соез 2006, Бергер Стасто 2010
  численное решение уравнения БК в СГЛП Лаппи Мантесаари 2015

  суммирование вкладов $\sim \beta$ во всех порядках - rcBK Балицкий 2007
  численное решение уравнения rcBK Албасете Арместо Милхано Ариас Салгадо 2010

Решение линейного уравнения для рассеяния вперед

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \hat{K}\hat{G}, \quad \hat{G}|_{\eta=\eta_0} = \hat{1}, \quad \langle n\nu|\hat{K}|h\rho\rangle = \bar{\alpha}\chi(n,\rho)\delta_{nh}\delta\left(\rho-\nu\right)$$

η_0 — энергетический масштаб импакт фактора.

$$\bar{\alpha} = \alpha_s N_c/\pi, \quad \chi(n,\nu) = 2Re(\psi(1) - \psi((1+n)/2 + i\nu))$$

После свертки с импакт фактором $\langle n\nu|\hat{K}|\Phi\rangle$

$$\frac{\partial \langle n\nu|G|\Phi\rangle}{\partial \eta} = \bar{\alpha}\chi(n,\nu)\langle n\nu|G|\Phi\rangle, \quad \langle n\nu|G|\Phi\rangle \sim e^{\bar{\alpha}\chi(n,\nu)\eta}.$$

$$\langle \vec{r}|n\nu\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{in\phi}(\vec{r}^{\,2})^{-\frac{1}{2}+i\nu}$$

Уравнение БФКЛ в СГЛП

- Ядро БФКЛ в квазиконформном виде в СГП имеет
  неконформный вклад $\sim \beta$

Фадин Липатов 1998

$$\langle n\nu|\hat{K}|h\rho\rangle = \left[\bar{\alpha}\chi(n,\rho) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(n,\rho)\right]\delta_{nh}\delta\left(\rho-\nu\right)$$

$$-i\frac{\bar{\alpha}^2\beta}{4}\chi(n,\rho)\delta_{nh}\delta'\left(\rho-\nu\right),$$

$\delta(n,\nu)$ содержит все вклады СГП без производных

- Для $\mathbf{G} = \chi\langle n\nu|\hat{G}|\Phi\rangle$ уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\eta} - i\frac{\bar{\alpha}^2\beta}{4}\chi(n,\nu)\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\nu} = \left[\bar{\alpha}\chi(n,\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(n,\nu)\right]\mathbf{G}$$

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}|_{\eta=\eta_0} = \chi(n,\nu)\Phi_B\left(n,\nu\right)$$

Решение для рассеяния вперед в СГЛП

- Решение

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0(n, F^{-1}(F(v) + \Delta F))$$

$$\times e^{-\frac{4i}{\bar{\alpha}\beta}(F^{-1}(F(\nu)+\Delta F)-\nu)} e^{-\frac{i}{\beta}\int_{\nu}^{F^{-1}(F(\nu)+\Delta F)} \frac{\delta(n,l)}{\chi(n,l)} dl}.$$

$$\Delta F = \frac{\bar{\alpha}^2 \beta i(\eta - \eta_0)}{4}, \quad F(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{dl}{\chi(n,l)}.$$

- в СГЛП

$$\langle n\nu|\hat{G}|\Phi\rangle = \left(\Phi_B(n,\nu) + \frac{\bar{\alpha}^2\beta i}{4}[\Phi_B(n,\nu)\chi(n,\nu)]'\eta\right)$$

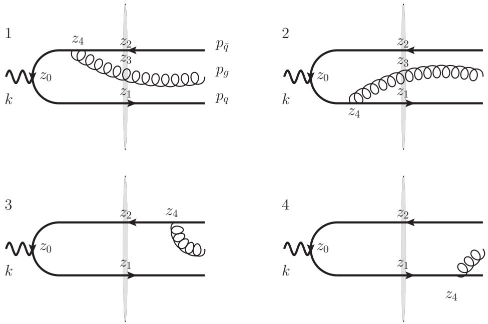
$$\times e^{\bar{\alpha}\chi(n,\nu)(\eta-\eta_0)+\frac{\bar{\alpha}^2}{4}\delta(n,\nu)\eta+\frac{\bar{\alpha}^3\beta i}{8}\chi(n,\nu)\chi'(n,\nu)\eta^2}.$$

Вычисление импакт факторов

- $\gamma^* \to V$ в СГП в рамках подхода БФКЛ — Иванов Коцкий Папа 2005
- $\gamma^* \to \gamma^*$ в СГП в рамках ВЭОР — Балицкий Кирилли 2010

- $\gamma^* \to q\bar{q}g$ в ГП в рамках ВЭОР — Буссари АГ Шимановский Валлон 2014
- $\gamma^* \to q\bar{q}$ в СГП в рамках ВЭОР — Буссари АГ Шимановский Валлон 2016
- $\gamma^* \to V_L$ в СГП в рамках ВЭОР — Буссари АГ Иванов Шимановский Валлон 2017
  произвольная кинематика: $\epsilon_{T,L}$, $t \neq 0$, $Q^2 \neq 0$

Фоторождение $q\bar{q}g$



$$M^{\alpha} = \frac{N_c^2}{2}\int d\vec{z}_1 d\vec{z}_2 d\vec{z}_3 F_1\left(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\right)^{\alpha}\left(\mathbf{U}_{13} + \mathbf{U}_{32} - \mathbf{U}_{12} + \mathbf{U}_{13}\mathbf{U}_{32}\right) + \int d\vec{z}_1 d\vec{z}_2\, F_2\left(\vec{z}_1, \vec{z}_2\right)^{\alpha}\left(N_c^2 - 1\right)\mathbf{U}_{12}$$

Импакт фактор фоторождения $q\bar{q}g$

Для продольно поляризованного фотона

$$F_{1L}\left(\vec{z}_1,\vec{z}_2,\vec{z}_3\right)=2Qg\frac{e^{-i\vec{p}_q\cdot\vec{z}_1-i\vec{p}_{\bar{q}}\cdot\vec{z}_2-i\vec{p}_g\cdot\vec{z}_3}}{\pi\sqrt{2p_g^+}}K_0(QZ_{123})\delta_{\lambda_q,-\lambda_{\bar{q}}}$$

$$\times\left\{(x_{\bar{q}}+x_g\delta_{-s_g\lambda_q})x_q\frac{\vec{z}_{32}\cdot\vec{\varepsilon}_g^{\,*}}{\vec{z}_{32}^{\,2}}-(x_q+x_g\delta_{-s_g\lambda_{\bar{q}}})x_{\bar{q}}\frac{\vec{z}_{31}\cdot\vec{\varepsilon}_g^{\,*}}{\vec{z}_{31}^{\,2}}\right\}-(q\leftrightarrow\bar{q})$$

$$F_{2L}\left(\vec{z}_1,\vec{z}_2\right)=4ig\,Q\frac{e^{-i\vec{p}_q\cdot\vec{z}_1-i\vec{p}_{\bar{q}}\cdot\vec{z}_2}}{\sqrt{2p_g^+}}\delta_{\lambda_q,-\lambda_{\bar{q}}}$$

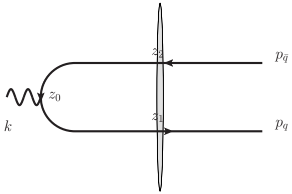
$$\times\frac{x_q\left(x_g+x_{\bar{q}}\right)\left(\delta_{-s_g\lambda_q}x_g+x_{\bar{q}}\right)}{x_{\bar{q}}\,x_g}\frac{\vec{P}_{\bar{q}}\cdot\vec{\varepsilon}_g^{\,*}}{\vec{P}_{\bar{q}}^2}e^{-i\vec{p}_g\cdot\vec{z}_2}K_0(QZ_{122})-(q\leftrightarrow\bar{q})$$

$$Z_{123}=\sqrt{x_qx_{\bar{q}}\vec{z}_{12}^{\,2}+x_qx_g\vec{z}_{13}^{\,2}+x_{\bar{q}}x_g\vec{z}_{23}^{\,2}},\quad Z_{122}=\sqrt{x_q\left(1-x_q\right)\vec{z}_{12}^{\,2}}$$

Импакт фактор $\gamma \to q\bar{q}$

Матричный элемент ЭМ тока

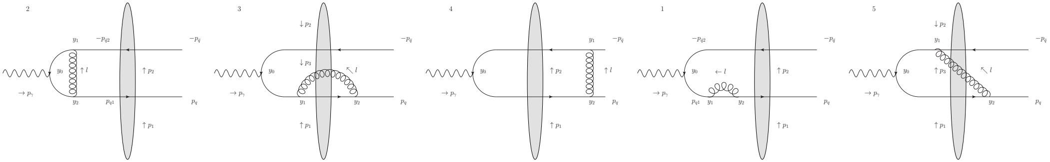
$$M_0^\alpha = \int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp} \delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp}) \Phi_0^\alpha [tr(U_1 U_2^\dagger) - N_c](p_{1\perp}, p_{2\perp})$$



Импакт фактор для продольно поляризованного фотона

$$\Phi_0^+ = \frac{2x\bar{x}p_\gamma^+}{\vec{p}_{q1}^{\,2} + x\bar{x}Q^2} (\overline{u}_{p_q} \gamma^+ v_{p_{\bar{q}}})$$

Импакт фактор $\gamma \to q\bar{q}$ в СГП



$$M^{\alpha} = g\int d^d p_{1\perp} d^d p_{2\perp}\left\{\delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp})\Phi_3^{\alpha}\frac{N_c^2-1}{N_c}[tr(U_1U_2^{\dagger}) - N_c]\right.$$

$$\left. + \int\frac{d^d p_{3\perp}}{(2\pi)^d}\delta(p_{q1\perp} + p_{\bar{q}2\perp} - p_{\gamma\perp} - p_{3\perp})\Phi_4^{\alpha}[tr(U_1U_3^{\dagger})tr(U_3U_2^{\dagger}) - N_c tr(U_1U_2^{\dagger})]\right\}.$$

Дифракционное фоторождение 2 струй

- Произвольная кинематика:

$$\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}, x, t, M^2_{q\bar{q}}, Q^2, \epsilon_{L/T}$$

- Матрица плотности для сечений:

$$d\sigma_{JI} = \begin{pmatrix} d\sigma_{LL} & d\sigma_{LT} \\ d\sigma_{TL} & d\sigma_{TT} \end{pmatrix}, \qquad d\sigma_{TL} = d\sigma^*_{LT}.$$

- 2 адронных матр. элемента: диполь и двойной диполь

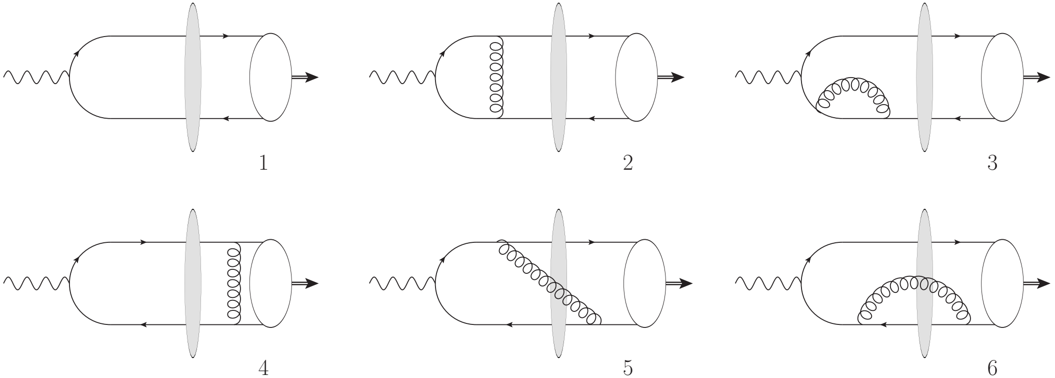
$$\langle p'|tr(U_1 U_2^\dagger) - N_c|p\rangle, \quad \langle p'|tr(U_1 U_3^\dagger)tr(U_3 U_2^\dagger) - N_c tr(U_1 U_2^\dagger)|p\rangle$$

Сокращение сингулярностей

- УФ — сокращены в следствие тождеств Ворда ($Z_1 = Z_2$)
- по быстроте — сокращены контрчленом в виде свертки ядра БК и борновского ИФ
- промежуточные УФ — сокращены в свертке ИФ и вильсоновского оператора
- коллинеарные — устранены конусным алгоритмом $\Delta\phi^2 + \Delta Y^2 < R^2$
- мягкие — устранены введением минимальной наблюдаемой энергии струи $\omega_g < E$

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(x_{\bar{j}}\vec{p}_j - x_j\vec{p}_{\bar{j}})^4}{x_{\bar{j}}^2 x_j^2 R^4 \vec{p}_{\bar{j}}^{\,2} \vec{p}_j^{\,2}} \right) \left(\ln\left(\frac{4E^2}{x_{\bar{j}} x_j (p_\gamma^+)^2} \right) + \frac{3}{2} \right) \right.$$
$$\left. + \ln(8) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_j}{x_{\bar{j}}} \right) \ln\left(\frac{x_j \vec{p}_{\bar{j}}^{\,2}}{x_{\bar{j}} \vec{p}_j^{\,2}} \right) + \frac{13 - \pi^2}{2} \right] + d\sigma_{reg}$$

Импакт фактор $\gamma^* \to V_L$



Амплитуда распределения φ твиста 2 :

$$\langle V_L(p_V)|\bar{\Psi}(y)\gamma^\mu \Psi(0)|0\rangle_{y^2\to 0} = f_V\, p_V^\mu \int_0^1 dx\, e^{ix(p_V\cdot y)}\, \varphi(x,\mu_F)$$

Импакт фактор $\gamma^{(*)} \to V_L$

$$\mathcal{A}_{\text{СГП}} = -\frac{e_V f_V \varepsilon_\beta}{N_c} \int_0^1 dx\, \varphi(x, \mu_F) \frac{\alpha_s \Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{1+\epsilon}}$$

$$\times \int \frac{d^d \vec{p}_{1,2,3}}{(2\pi)^{2d-1}} \delta\left(p_V^+ - p_\gamma^+\right) \delta\left(\vec{p}_V - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3\right)$$

$$\times \Big\{ \Phi_2^\beta\left(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\right) \left[\mathrm{Tr}(U_1 U_3^\dagger)\mathrm{Tr}(U_3 U_2^\dagger) - N_c \mathrm{Tr}(U_1 U_2^\dagger)\right]\left(\vec{p}_1,\, \vec{p}_2,\, \vec{p}_3\right)$$

$$+ 2\, C_F \Phi_1^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2) \left[\mathrm{Tr}(U_1 U_2^\dagger) - N_c\right] \left(\vec{p}_1, \vec{p}_2\right) (2\pi)^d\, \delta\left(\vec{p}_3\right) \Big\} .$$

<u>Вычислены:</u>

$\Phi_1^\beta(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$ — ГП и СГП

$\Phi_2^\beta\left(x, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\right)$ — СГП

Сравнение с результатами других подходов

- построена процедура восстановления полной формы калибровочно инвариантных операторов по их мебиусовской форме — Фадин Фиоре АГ 2012

  ↳ построена полная форма оператора, приводящего ядро БФКЛ к квазиконформному виду.

Связь Мебиусовского и полного представлений ядра БФКЛ

- Полная форма: ядро получено в импульсном пространстве из реджеонных вершин. Используется для рассеяния любых частиц.

- Мебиусовская форма: ядро для дипольного оператора. Получено в координатном пространстве методом ударных волн.

- Переход от полной формы к мебиусовской

  Фадин Фиоре Папа 2007

  $\langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \hat{K} | \vec{q}\,'_1 \vec{q}\,'_2 \rangle \rightarrow \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{K}_M | \vec{r}\,'_1 \vec{r}\,'_2 \rangle$:

  1. Преобразование Фурье
  2. Отбрасыванье членов $\sim \delta(\vec{r}_{1'2'})$
  3. Добавление членов, не зависящих от $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$, чтобы $\langle \vec{r}\vec{r} | \hat{K}_M | \vec{r}\,'_1 \vec{r}\,'_2 \rangle = 0$

Восстановление полной формы по мебиусовской

- Доказана возможность восстановления и единственность результата при условиях:
  1. калибровочной инвариантности $K_r|_{\vec{q}_1'=0} = K_r|_{\vec{q}_2'=0} = 0$
  2. отсутствия членов $\sim \delta(\vec{q}_1)$ и $\delta(\vec{q}_2)$

- Построена процедура перехода
  1. Вычитание сингулярных членов при $\vec{r}_{1'2'} = 0$
  2. Преобразование Фурье
  3. Отбрасывние членов $\sim \delta(\vec{q}_1)$ и $\delta(\vec{q}_2)$
  4. Добавление членов, не зависящих от $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}_1'$: $K_r|_{\vec{q}_1'=0} = K_r|_{\vec{q}_2'=0} = 0$

- Построена полная форма оператора, приводящего ядро БФКЛ к квазиконформному виду.

В результате работы получены:

1. Уравнение эволюции для барионной вильсоновской петли в ГП, СГП, его квазиконформная и линеаризованная формы.
2. Уравнения эволюции для квадрупольного и дважды дипольного операторов в СГП, их квазиконформная форма.
3. Решение уравнения БФКЛ в СГЛП для рассеяния вперед.
4. Импакт факторы эксклюзивного дифракционного фоторождения 2 струй в СГП, продольно поляризованного легкого векторного мезона в СГП, 3 струй в ГП в общей кинематике.
5. Процедура восстановления полной формы калибровочно инвариантного оператора по его мебиусовской форме.
6. Полная и мебиусовская формы оператора, приводящего полное ядро БФКЛ в СГП к квазиконформному виду.

Основные результаты опубликованы в следующих работах:

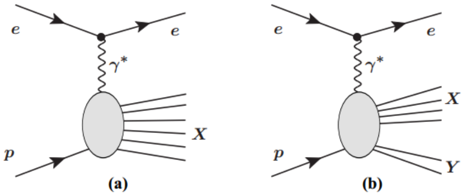
1. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski, S. Wallon, Phys.Rev. D100 (2019) no.7, 074020.
2. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, D. Y. Ivanov, L. Szymanowski, S. Wallon, Phys. Rev. Lett. 119 (2017) no.7, 072002.
3. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski, S. Wallon, JHEP 1611 (2016) 149.
4. A. V. Grabovsky, JHEP 1509 (2015) 194.
5. I. Balitsky and A. V. Grabovsky, JHEP 1501 (2015) 009.
6. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski, S. Wallon, JHEP 1409 (2014) 026.
7. A. V. Grabovsky, JHEP 1309 (2013) 141.
8. A. V. Grabovsky, JHEP 1309 (2013) 098.
9. R. E. Gerasimov and A. V. Grabovsky, JHEP 1304 (2013) 102.
10. V. S. Fadin, R. Fiore, A. V. Grabovsky and A. Papa, Nucl. Phys. B 856 (2012) 111.

Частичные результаты и доклады на конференциях опубликованы в следующих работах:

1. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, hep-ph:1912.12434.
2. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, D. Y. Ivanov, L. Szymanowski and S. Wallon, PoS DIS 2017 (2018) 062.
3. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, AIP Conf. Proc. 1819 (2017) no.1, 030009.
4. R. Boussarie, A. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, PoS DIS 2016 (2016) 170.
5. R. Boussarie, A. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, Acta Phys. Polon. Supp. 8 (2015) 897.
6. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, hep-ph:1511.02785.
7. A. Grabovskiy, PoS DIS 2015 (2015) 074.
8. R. Boussarie, A. V. Grabovsky, L. Szymanowski and S. Wallon, AIP Conf. Proc. 1654 (2015) no.1, 030005.
9. A. V. Grabovsky, Acta Phys. Polon. Supp. 7 (2014) no.3, 493.

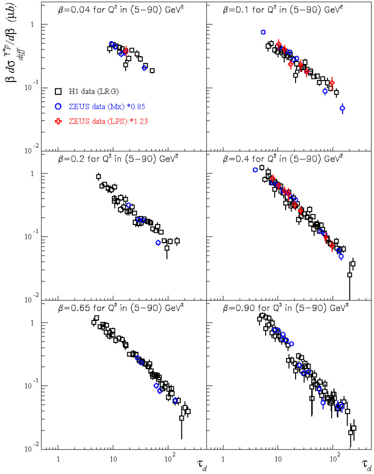
Дифракционные процессы

Наличие пробела по быстроте между X и Y



$$\beta = \frac{Q^2}{2(p - p')q}$$

$$x_P = x/\beta < 0.01$$



Маркет Шафел 2006

Сильные глюонные поля

насыщение $\rho_{glue}\sigma \sim 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{xG}{\pi R_h^2} \sim \frac{Q_s^2}{\alpha_s}$ $\qquad \frac{dN}{d^2k} = \frac{d\mathcal{N}}{dln\frac{1}{x}d^2k}$

$$xG(x,Q_s^2) \sim \int dx^- \langle P|F^{i+}F_i^+|P\rangle \sim \int^{Q_s^2} dk_\perp \frac{d\mathcal{N}}{dln\frac{1}{x}d^2k}$$

$$\sim \pi R_h^2 \mathcal{A}^2 \qquad\qquad \sim Q_s^2\, \pi R_h^2\, N$$

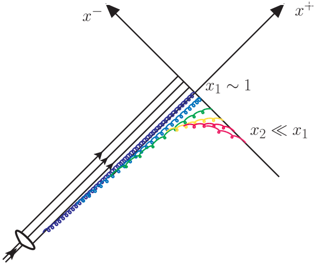
$\Longrightarrow$

- сильные глюонные поля $\mathcal{A} \sim \frac{Q_s}{g(Q_s)}$
- кинетическая энергия в $\mathcal{L}$ $\sim$ потенциальной: $\partial^2\mathcal{A}^2 \sim g^2\mathcal{A}^4$
- большие числа заполнения $N \sim \frac{1}{\alpha_s}$
- малые квантовые эффекты $N \sim \langle a^+ a\rangle \sim \frac{1}{\alpha_s} \gg \langle [a^+ a]\rangle \sim 1$

МакЛерран Венугопалан 1994, Ковчегов 1999

Конденсат цветного стекла (КЦС)

Ядро в системе ∞ импульса



для партонов с $p = (xP^+, \frac{\vec{k}^2}{2xP^+}, \vec{k})$:

$\Delta x^- \sim \frac{1}{xP^+}$ — светоконусная длина взаимодействия
$\Delta x^+ \sim \frac{2xP^+}{\vec{k}^2}$ — светоконусная время взаимодействия

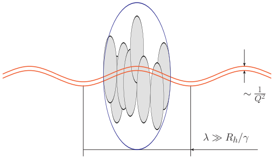
$$\Delta x_1^- \ll \Delta x_2^-, \quad \Delta x_1^+ \gg \Delta x_2^+$$

Мягкие партоны (x_2) воспринимают жесткие (x_1) как замороженные точечные $\sim \delta(x^-)$ классические цветовые заряды

МакЛерран Венугопалан 1994, Ковчегов 1999

Модель МакЛеррана - Венугопалана (MB)

MB: заряды — валентные кварки $\Longrightarrow$



- продольное разрешение $\lambda \sim \frac{1}{xP^+} \gg R_h \frac{m_p}{P^+} \Longrightarrow x \ll A^{-1/3}$
- поперечное разрешение $Q^2 \sim 1/S_\perp \gg \Lambda^2_{QCD}$
- плотность валентных кварков $n \sim \frac{N_c A}{\pi R_h^2} \sim \frac{N_c A}{\pi R_p^2 A^{2/3}} \sim \Lambda^2_{QCD} A^{1/3} \gg \Lambda^2_{QCD}$
- $\Longrightarrow \frac{1}{x} \gg A^{1/3} \gg \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}} \gg 1,\ n \sim Q_s^2$

$$\boxed{\langle Q^a \rangle = 0, \quad \langle Q^a Q^b \rangle = \delta^{ab} n S_\perp\, g^2 C_F = \delta^{ab} \frac{N_c A}{Q^2 \pi R_h^2}\, g^2 C_F}$$

- партоны с $x \sim 1$ создают ток $J^{\mu a} = \delta^{\mu +}\delta(x^-)\rho^a(x^-, x_\perp)$: $\qquad Q^a = \int_{S_\perp} dx_\perp dx^- \rho^a$
- партоны с $x \ll 1$ — решения $D_\mu F^{\mu\nu a} = J^{\nu a}$
- Гауссовское распределение зарядов $W[\rho] = \mathrm{N} \cdot exp[-\int dx^- dx_\perp \frac{\rho^a(x^-,x_\perp)\rho^a(x^-,x_\perp)}{2\mu^2(x^-)}]$,
  $\int dx^- \mu^2(x^-) = \frac{g^2 A}{2\pi R_h^2}$
- наблюдаемые вычисляются усреднением: $\langle O[\mathcal{A}] \rangle = \int \mathcal{D}\rho W[\rho] O[\mathcal{A}[\rho]]$

Эффективная теория КЦС, уравнения JIMWLK

- модель MB: $W[\rho] \to W_{\Lambda^+}[\rho]$, $\Lambda^+ \sim P^+$, заряды с $k^+ > \Lambda^+$, поля с $k^+ = xP^+ < \Lambda^+$
  $W_{\Lambda^+} = W_\eta, \qquad \eta = \ln \frac{P^+}{\Lambda^+}, \qquad e^{-\eta} \sim 1,$ заряды с $x > e^{-\eta}$, поля с $x < e^{-\eta}$
- поля с малым x квантовые $\langle O[\mathcal{A}] \rangle = \int \mathcal{D}\rho W_{\Lambda^+}[\rho] \left\{ \frac{\int_{\Lambda^+} \mathcal{D}\mathcal{A} e^{iS[\mathcal{A},\rho]} O[\mathcal{A}]}{\int_{\Lambda^+} \mathcal{D}\mathcal{A} e^{iS[\mathcal{A},\rho]}} \right\}$
- при $\alpha_s \ln \frac{\Lambda^+}{k^+} \sim \alpha_s \ln \frac{1}{x} \sim 1$ излучение глюона $\Longrightarrow$ новый заряд для мод мягче k^+
- уравнение эволюции: $\frac{\partial W_\eta[\rho]}{\partial \eta} = \mathcal{H}_{JIMWLK} W_\eta[\rho]$, начальные условия: $W_0 = W_{MV}$

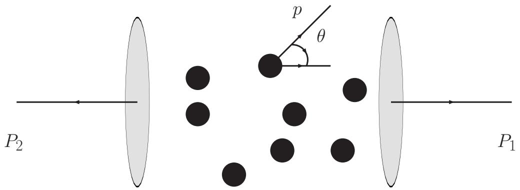
Наблюдаемые:

- множественности, спектры в pp, pA, AA столкновениях ...
- дифференциальное и дифракционное сечения в ep cnолкновениях...
- ...

Джалилиан-Мариан Янку МакЛерран Вейгерт Леонидов Ковнер 1997 – 2002

Кинематика

$$P_1^+ \sim P_2^- \sim \sqrt{s}, \quad P_1^- \sim P_2^+ \sim \frac{M^2}{\sqrt{s}}$$



псевдобыстрота

$$\eta = -\ln \mathrm{tg}\, \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{p + p_z}{p - p_z}$$

для $m = 0 : y = \eta$

светоконусные переменные:

$$p^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^3), \quad m^2 = 2p^+p^- - p_\perp^2$$

доля продольного импульса

$$x = \frac{p^+}{P_1^+}, \quad \frac{p_\perp}{\sqrt{2}P_1^+} \le x \le 1$$

быстрота

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p^+}{p^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2(p^+)^2}{p_\perp} = y_1 - \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{M}{p_\perp}$$

$$y_1 - y \simeq \ln \frac{1}{x}$$

Рождение частиц в центральной области быстрот отражает свойства волновых функций сталкивающихся частиц при малых x

Сокращение коллинеарной расходимости

Контрчлен для дипольного вклада в СГП

$$\tilde{\Phi}_1^{\beta}(x,\mu_F) = -\int_0^1 dz\, \mathcal{K}(z,x) \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2}\right)\right] \Phi_0^{\beta}(z)$$

$\mathcal{K}(x,z)$ — ядро уравнения Ефремова-Радюшкина-Бродского-Лепажа

$$\frac{\partial \varphi(x,\mu_F)}{\partial \ln \mu_F^2} = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{\epsilon}} \left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon} \int_0^1 dz\, \varphi(z,\mu_F)\, \mathcal{K}(x,z)$$

Лепаж Бродский 1979, Ефремов Радюшкин 1980

$$\mathcal{K}(x,z) = \frac{1-x}{1-z}\left(1 + \left[\frac{1}{x-z}\right]_+\right)\theta(x-z)$$
$$+ \frac{x}{z}\left(1 + \left[\frac{1}{z-x}\right]_+\right)\theta(z-x) + \frac{3}{2}\,\delta(z-x)$$

Подход БФКЛ

Ядро БФКЛ в операторной форме

$$\hat{\mathcal{K}} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\mathcal{K}}_r$$

ω — реджевская траектория глюона
$\hat{\mathcal{K}}_r$ — реальная часть ядра

Скачок амплитуды в s-канале для процесса $A + B \to A' + B'$:

$$-4i(2\pi)^{D-2}\delta(\vec{q}_A - \vec{q}_B)\mathrm{disc}_s\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \langle A'\bar{A}|e^{Y\hat{\mathcal{K}}}|\bar{B}'B\rangle$$

$Y = \ln(s/Q^2), \quad q_A = p_{A'} - p_A, \;\; q_B = p_B - p_{B'}$
$\langle A'\bar{A}|, |\bar{B}'B\rangle$ — импакт факторы

Мебиусовская форма ядра БФКЛ

— это ядро в координатном представлении, упрощенное для рассеяния бесцветных частиц:

- цветовая прозрачность

$$\langle A'\bar{A}|\psi\rangle = 0, \quad \text{если} \quad \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2|\psi\rangle \sim \delta(\vec{q}_1) \text{ или } \delta(\vec{q}_2),$$

  т.е. в координатном представлении $\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2|\psi\rangle$ не зависит от $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$.

- реальная часть ядра $=0$, если импульс входящего реджеона $=0$

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2|\hat{\mathcal{K}}_r|\vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}'\rangle|_{\vec{q}_i' \to 0} \to 0.$$

- Следовательно

$$\langle A'\bar{A}|\hat{\mathcal{K}}|\psi\rangle = 0, \quad \text{если} \quad \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2|\psi\rangle \sim \delta(\vec{q}_1) \text{ или } \delta(\vec{q}_2)$$

  ($\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2|\psi\rangle$ не зависит от $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$), т.е. ядро сохраняет свойство импакт фактора падающей частицы.

Мебиусовская форма

- Следовательно второй импакт фактор можно изменить, не меняя скачок, добавив члены не зависящие от одной из координат $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$, приведя его к дипольной форме
$$\langle \vec{r}\,', \vec{r}\,' | \bar{B}' B \rangle_d = 0\ .$$
с помощью преобразования
$$\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' | \bar{B}\,' B \rangle \to$$
$$\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' | \bar{B}' B \rangle_d = (\langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' | - 1/2 \langle \vec{r}_1{}', \vec{r}_1{}' | - 1/2 \langle \vec{r}_2{}', \vec{r}_2{}' |) | \bar{B}' B \rangle.$$
- Ядро в координатном представлении имеет вид
$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle = A(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}') + \delta\left(\vec{r}_{1'2'}\right) D(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}'),$$
где в A нет $\delta\left(\vec{r}_{1'2'}\right)$. Добавив члены, не зависящие от $\vec{r}_1$ или $\vec{r}_2$ можно добиться, чтобы A равнялось 0 при $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$.

Мебиусовская форма ядра

- Indeed, $\langle A'\bar{A}|\hat{\mathcal{K}}^n \to \langle A'\bar{A}|(\hat{\mathcal{K}}+\hat{\mathcal{C}})^n$, where $\hat{\mathcal{C}}$ — is the operator with matrix element independent of $\vec{r}_1$ or of $\vec{r}_2$. Expanding we get all terms with $\hat{\mathcal{C}}$ have $\langle A'\bar{A}|\hat{\mathcal{C}} = 0$ or $\langle A'\bar{A}|\hat{\mathcal{K}}^m\hat{\mathcal{C}} = 0$.
- After this the kernel can be rewritten as

$$\hat{\mathcal{K}} \to \hat{\mathcal{K}}_m + \hat{\mathcal{D}},$$

  where the matrix element $\hat{\mathcal{K}}_m$ is equal to 0 when $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, and the matrix element $\hat{\mathcal{D}}$ has $\delta\left(\vec{r}_{1'2'}\right)$.
- the operator $\hat{\mathcal{D}}$ can be dropped without changing the discontinuity because in $(\hat{\mathcal{K}}_m + \hat{\mathcal{D}})^n|\bar{B}'B\rangle_d$ all terms with $\hat{\mathcal{D}}$ have

$$\hat{\mathcal{D}}|\bar{B}'B\rangle_d = 0 \quad \text{or} \quad \hat{\mathcal{D}}(\hat{\mathcal{K}}_m)^k|\bar{B}'B\rangle_d = 0.$$

After all these manipulations we get the kernel $\hat{\mathcal{K}}_m$, which is called dipole or Möbius.

Möbius form of the kernel

So, to find the Möbius form of the kernel one has to pass the following steps:

- Furier transform the kernel into the coordinate space

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle = \int \frac{d^2 q_{1,2,1',2'}}{(2\pi)^4} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}} | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle e^{i[\vec{q}_1 \vec{r}_1 + \vec{q}_2 \vec{r}_2 - \vec{q}_1{}' \vec{r}_1{}' - \vec{q}_2{}' \vec{r}_2{}']} \, .$$

- Drop all terms proportional to $\delta\left(\vec{r}_{1'2'}\right)$.
- Add to the kernel some terms independent of $\vec{r}_1$ or of $\vec{r}_2$ so that the kernel acquires the "dipole" property $\langle \vec{r}\ \vec{r} | \hat{\mathcal{K}} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle = 0$.

After all these transformations in LO one gets the dipole evolution kernel

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_m^{LO} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d\vec{\rho} \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{1\rho}{}^2 \vec{r}_{2\rho}{}^2} \left[\delta(\vec{r}_{11'}) \delta(\vec{r}_{2'\rho}) + \delta(\vec{r}_{1'\rho}) \delta(\vec{r}_{22'}) - \delta(\vec{r}_{11'}) \delta(r_{22'}) \right]$$

Here $\vec{r}_{i\rho} = \vec{r}_i - \vec{\rho}$.

Freedom in the definition of the kernel

The discontinuity $\mathrm{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{A'B'}$

$$-4i(2\pi)^{D-2}\delta(\vec{q}_A - \vec{q}_B)\mathrm{disc}_s \mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \langle A'\bar{A}| \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\hat{\mathcal{K}}} |\bar{B}'B\rangle$$

does not change if one changes the kernel via a nonsingular operator $\hat{\mathcal{O}}$,

$$\hat{\mathcal{K}} \to \hat{\mathcal{O}}^{-1}\hat{\mathcal{K}}\hat{\mathcal{O}} \ , \ \ \langle A'\bar{A}| \to \langle A'\bar{A}|\hat{\mathcal{O}} \ , \ \ |\bar{B}'B\rangle \to \hat{\mathcal{O}}^{-1}|\bar{B}'B\rangle \ .$$

In LO this operator is fixed by the requirement that LO BFKL kernel equals LO BK kernel. After fixing $\hat{\mathcal{O}}$ in the leading order, there is residual freedom $\hat{\mathcal{O}} = 1 - \hat{O}$, where $\hat{O} \sim g^2$. In NLO after these transformations we get

$$\hat{\mathcal{K}} \to \hat{\mathcal{K}} - [\hat{\mathcal{K}}^{(B)}, \hat{O}] \ ,$$

where $\hat{\mathcal{K}}^{(B)}$ — is LO kernel.

Operator to eliminate the difference of BFKL and BK kernels

- $$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{O} | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle = \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{K}}_r^B \ln \hat{q}_{11'}^2 | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle$$
$$+\frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2}\delta(\vec{q}_{22'})\delta(\vec{q}_{11'}) \int d^{2+2\epsilon}k \ln \vec{k}^{\,2} \left(\frac{2}{\vec{k}^{\,2}} - \frac{\vec{k}(\vec{k}-\vec{q}_1)}{\vec{k}^{\,2}(\vec{k}-\vec{q}_1)^2} - \frac{\vec{k}(\vec{k}-\vec{q}_2)}{\vec{k}^{\,2}(\vec{k}-\vec{q}_2)^2} \right).$$
- With this operator the Möbius form of the transformed kernel
$$\hat{\mathcal{K}} - [\hat{\mathcal{K}}^B, \hat{O}],$$
coincides with the BK kernel (2010).

Quasi-conformal kernel

Transition to the composite dipole operators of Balitsky and Chirilli equivalent to the transformation of the kernel with the operator

$$\hat{\mathcal{K}} \to \hat{\mathcal{K}}^{QC} = \hat{\mathcal{K}} - [\hat{\mathcal{K}}^{B}, O_1],$$

where

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{O}_{1M} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle =$$

$$= \frac{\alpha_s(\mu) N_c}{4\pi^2} \int d\vec{\rho} \frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{1\rho}^{\,2} \vec{r}_{2\rho}^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{r}_{12}{}^2}{\vec{r}_{1\rho}^{\,2} \vec{r}_{2\rho}^{\,2}}\right) \left[\delta(\vec{r}_{11'})\delta(\vec{r}_{2'\rho}) + \delta(\vec{r}_{1'\rho})\delta(\vec{r}_{22'}) - \delta(\vec{r}_{11'})\delta(r_{22'})\right],$$

It kills all nonconformal terms in the kernel which are not related to renormalization.

Restoration of full form from Möbius form

- Is it possible to restore the full kernel in the momentum space from its Möbius form in the coordinate space? Will it be unique?

- Yes, if we demand
  - gauge invariance

$$\mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k} = \vec{q}_1) = \mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k} = -\vec{q}_2) = 0.$$

  - absence of terms proportional to $\delta(\vec{q}_1)$ or $\delta(\vec{q}_2)$ in the kernel. It fixes the residual freedom connected with such terms.

Restoration of full form from Möbius form

- Fourier transform into momentum space

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle = \int \frac{d\vec{r}_1}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2}{2\pi} \frac{d\vec{r}_1{}'}{2\pi} \frac{d\vec{r}_2{}'}{2\pi} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_1 - i\vec{q}_2 \vec{r}_2 + i\vec{q}_1{}' \vec{r}_1{}' + i\vec{q}_2{}' \vec{r}_2{}'} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' \rangle$$

$$= \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}_1{}' - \vec{q}_2{}') \mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}),$$

where $\vec{k} = \vec{q}_1 - \vec{q}_1{}' = \vec{q}_2{}' - \vec{q}_2$ and

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}) = \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'} - i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M | \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' \rangle$$

- subtract singularity at $\vec{r}_{1'2'} = 0$.

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- = \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'} - i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M^{NS} | \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' \rangle$$

$$+ \int \frac{d\vec{r}_{11'}}{2\pi} \frac{d\vec{r}_{22'}}{2\pi} d\vec{r}_{1'2'} e^{-i\vec{q}_1 \vec{r}_{11'} - i\vec{q}_2 \vec{r}_{22'}} (e^{-i\vec{k}\vec{r}_{1'2'}} - 1) \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}_M^{S} | \vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}' \rangle.$$

Restoration of full form from Möbius form

- since

$$\mathcal{K}_M(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_- = \mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_-$$

$$-\delta(\vec{q}_2) f_1(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{k}) - \delta(\vec{q}_1)) f_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{k}),$$

  we should drop all terms proportional to $\delta(\vec{q}_1), \delta(\vec{q}_2)$ to get $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_-$.

- finally, to get the full kernel we should add to $\mathcal{K}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})_-$ some terms independent of $\vec{k}$ so that

$$\mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k} = \vec{q}_1) = \mathcal{K}_r(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k} = -\vec{q}_2) = 0.$$

Restoration of full form from Möbius form

- Suppose we have two full kernels with the same Möbius form. Then their difference will have zero Möbius form and

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}^{(1)} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle - \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \hat{\mathcal{K}}^{(2)} | \vec{r}_1{}' \vec{r}_2{}' \rangle \sim \delta(\vec{r}_{1'2'})$$

  i.e. the full kernels can differ only in terms independent of $\vec{k}$ in the real part.

- On the other hand, gauge invariance requires turning the difference $\mathcal{K}^{(1)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k}) - \mathcal{K}^{(2)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{k})$ into zero at $\vec{k} = \vec{q}_1$ and at $\vec{k} = -\vec{q}_2$. Therefore, it is zero identically.

Full form for O_1

- Using this procedure we restored the full form for matrix element of O_1 in the momentum space

$$\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \alpha_s \hat{O}_1 | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle = \delta(\vec{q}_{11'} + \vec{q}_{22'}) \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \left[\frac{2}{\vec{k}^{\,2}} \ln(\vec{k}^{\,2}) + \frac{1}{\vec{q}_1^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_1{}'^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}^{\,2}} \right) \right.$$

$$+ \frac{1}{\vec{q}_2^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_2{}'^{\,2} \vec{q}_1^{\,2}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}^{\,2}} \right) + \frac{1}{\vec{k}^{\,2}} \ln\left(\frac{\vec{q}_1{}'^{\,2} \vec{q}_2{}'^{\,2}}{\vec{q}_1^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \right) - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{k}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}_1^{\,2}} \ln\left(\vec{q}_1{}'^{\,2} \right) + 2 \frac{\vec{q}_2 \vec{k}}{\vec{k}^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \ln\left(\vec{q}_2{}'^{\,2} \right)$$

$$\left. - 2 \frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{\vec{q}_1^{\,2} \vec{q}_2^{\,2}} \ln(\vec{q}^{\,2}) \right] - \frac{\alpha_s N_c}{4\pi^2} \delta(\vec{q}_{22'}) \delta\left(\vec{q}_{11'} \right) \int d\vec{l} \ln \vec{l}^{\,2} \left(\frac{2}{\vec{l}^{\,2}} - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_1)}{\vec{l}^{\,2} (\vec{l} - \vec{q}_1)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\vec{l}(\vec{l} - \vec{q}_2)}{\vec{l}^{\,2} (\vec{l} - \vec{q}_2)^2} \right) - (\psi(1) + \ln 2) \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \hat{\mathcal{K}}^B | \vec{q}_1{}', \vec{q}_2{}' \rangle \ ,$$