

ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ В ФОТОНЫ С ТОЧНОСТЬЮ α^3 .

Роман Ли

Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН, 11 марта 2020 г.

Институт ядерной физики СО РАН

МОТИВАЦІЯ

- Полные борновские сечения всех основных процессов $2 \rightarrow 2$ в КЭД при произвольных энергиях приведены в любом учебнике (например, в IV томе ЛЛ), в то время как результаты для аналогичных сечений процессов $2 \rightarrow 3$ практически отсутствуют. За одним исключением ($\gamma Z \rightarrow e^+e^-Z$, Раска [1934]), в литературе можно найти лишь вычисления в двух предельных случаях: вблизи порога или при больших энергиях.
- Это неудивительно, поскольку вычисление полного сечения для процесса $2 \rightarrow 3$ приближается по сложности к вычислению двухпетлевых диаграмм (боксов в “forward” кинематике).
- Тем не менее, современные методы многопетлевых вычислений делают эти задачи совершенно доступными и даже почти рутинными.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:
Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
Eidelman and Kuraev [1978],
Berends and Kleiss [1981].

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:
Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
Eidelman and Kuraev [1978],
Berends and Kleiss [1981].
 - Во всех работах рассматривалась асимптотика $s \gg m^2$. В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов $\omega > \omega_0$.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения.

Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:

Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],

Eidelman and Kuraev [1978],

Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика $s \gg m^2$. В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов $\omega > \omega_0$.
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания ω_0 .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения.

Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:

Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],

Eidelman and Kuraev [1978],

Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика $s \gg m^2$. В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов $\omega > \omega_0$.
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания ω_0 .

- Во всех работах попарно различные результаты для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения.

Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:

Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],

Eidelman and Kuraev [1978],

Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика $s \gg m^2$. В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов $\omega > \omega_0$.
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания ω_0 .

- Во всех работах попарно различные результаты для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$.
- Во всех работах попарно различные результаты для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ при произвольных $s = (p_+ + p_-)^2$ с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики $s \gg m^2$ показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения.

Процесс рассматривался как минимум в трёх работах:

Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],

Eidelman and Kuraev [1978],

Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика $s \gg m^2$. В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов $\omega > \omega_0$.
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания ω_0 .

- Во всех работах попарно различные результаты для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$.
- Во всех работах попарно различные результаты для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$.
- Обновлённая цель: вычислить также $\sigma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma)$ @NLO.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. Полное сечение выражалось в виде суммы разрезанных диаграмм:

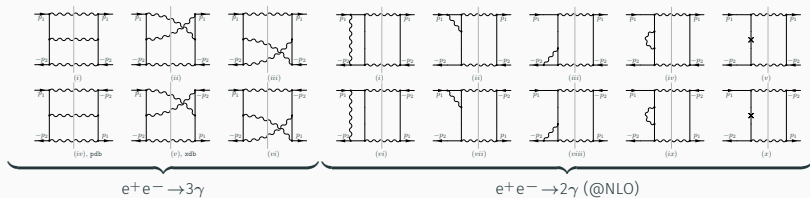


Рис.: Диаграммы для вычисления полного сечения процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ (слева) и виртуальной поправки к полному сечению $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ (справа).

1. Полное сечение выражалось в виде суммы разрезанных диаграмм:

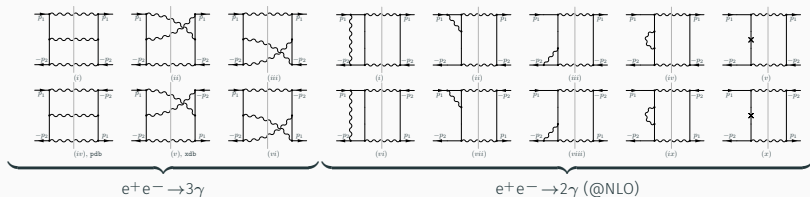


Рис.: Диаграммы для вычисления полного сечения процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ (слева) и виртуальной поправки к полному сечению $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ (справа).

2. Выполнялась IBP редукция (**LiteRed**, [Lee, 2014]), строились дифференциальные уравнения на мастер-интегралы [Kotikov, 1991, Remiddi, 1997]

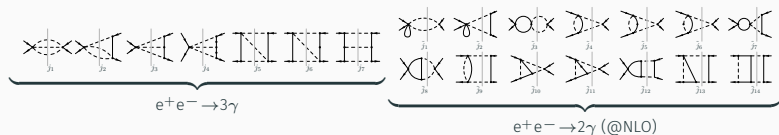


Рис.: Мастер-интегралы.

3. Дифференциальные системы приводились к ϵ -форме [Henn, 2013, Lee, 2015],
Libra

$$\partial_\beta J = \epsilon M(\beta) J$$

Здесь $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 4/s}$ — скорость электрона в с.ц.и.

3. Дифференциальные системы приводились к ϵ -форме [Henn, 2013, Lee, 2015],
Libra

$$\partial_\beta J = \epsilon M(\beta) J$$

Здесь $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 4/s}$ — скорость электрона в с.ц.и.

4. Общее решение

$$J(\beta) = \text{Pexp}\left[\epsilon \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta M(\beta)\right] J(\beta_0) = \sum_n \epsilon^n \iiint_{\beta > \beta_n > \dots > \beta_1 > \beta_0} d\beta_n M(\beta_n) \dots d\beta_1 M(\beta_1) J(\beta_0)$$

выражается через обобщенные полилогарифмы.

3. Дифференциальные системы приводились к ϵ -форме [Henn, 2013, Lee, 2015],
Libra

$$\partial_\beta J = \epsilon M(\beta) J$$

Здесь $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 4/s}$ — скорость электрона в с.ц.и.

4. Общее решение

$$J(\beta) = \text{Pexp}\left[\epsilon \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta M(\beta)\right] J(\beta_0) = \sum_n \epsilon^n \iiint_{\beta > \beta_n > \dots > \beta_1 > \beta_0} d\beta_n M(\beta_n) \dots d\beta_1 M(\beta_1) J(\beta_0)$$

выражается через обобщенные полилогарифмы.

5. Граничные условия определялись по асимптотике $\beta \stackrel{\text{def}}{\rightarrow} 0$.

3. Дифференциальные системы приводились к ϵ -форме [Henn, 2013, Lee, 2015],
Libra

$$\partial_\beta J = \epsilon M(\beta) J$$

Здесь $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 4/s}$ – скорость электрона в с.ц.и.

4. Общее решение

$$J(\beta) = \text{Pexp}\left[\epsilon \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta M(\beta)\right] J(\beta_0) = \sum_n \epsilon^n \iiint_{\beta > \beta_n > \dots > \beta_1 > \beta_0} d\beta_n M(\beta_n) \dots d\beta_1 M(\beta_1) J(\beta_0)$$

выражается через обобщенные полилогарифмы.

5. Граничные условия определялись по асимптотике $\beta \stackrel{\text{def}}{\rightarrow} 0$.
 6. Результат имеет вид:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon} + \sigma_3, \quad \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma(\text{virt})} = -\frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon} + \sigma_2.$$

NB: Вклад $\pm \frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon}$ связан с инфракрасной расходимостью. Он сокращается в полном сечении $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$. Чтобы получить физически наблюдаемые сечения, нужно перенести вклад мягкофотонной области из первого сечения во второе. Мягкофотонная область определяется условием $\omega_i < \omega_0$ для $i = 1, 2$ или 3 , где ω_0 – точность измерения энергии.

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2 (u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ: $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$. Здесь $\beta_{12} = \sqrt{1 - 1/(u_1 \cdot u_2)^2}$ — относительная скорость частиц.

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2(u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ: $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$. Здесь $\beta_{12} = \sqrt{1 - 1/(u_1 \cdot u_2)^2}$ — относительная скорость частиц.

- Однако, нам нужен аналогичный интеграл в размерностной регуляризации:

$$I^{(4-2\epsilon)}(u_1, u_2) = \frac{e^{\epsilon\gamma_E} \Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \int \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{\omega^2(u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)},$$

включая члены $\propto \epsilon^1$. Последние зависят уже и от скоростей частиц $\beta_{1,2}$ в лабораторной системе. Это, конечно, неудивительно, поскольку фиксация или ограничение частоты фотона не является Лоренц-инвариантной процедурой.

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2(u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ: $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$. Здесь $\beta_{12} = \sqrt{1 - 1/(u_1 \cdot u_2)^2}$ — относительная скорость частиц.

- Однако, нам нужен аналогичный интеграл в размерностной регуляризации:

$$I^{(4-2\epsilon)}(u_1, u_2) = \frac{e^{\epsilon\gamma_E} \Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} \int \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{\omega^2(u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)},$$

включая члены $\propto \epsilon^1$. Последние зависят уже и от скоростей частиц $\beta_{1,2}$ в лабораторной системе. Это, конечно, неудивительно, поскольку фиксация или ограничение частоты фотона не является Лоренц-инвариантной процедурой.

- Интеграл можно также вычислить с помощью методов многопетлевых вычислений: IBP-редукция \rightarrow Приведение к ϵ -форме \rightarrow Выражение через полилогарифмы.

Получаем

$$I^{(4-2\epsilon)}(u_1, u_2) = \frac{1}{\beta_{12}} \left\{ -\ln x_3 + \epsilon \left[f(x_1 x_3 / x_2) + f(x_2 x_3 / x_1) + f(x_1 x_2 x_3) - f(x_1 x_2 / x_3) - f(x_3^2) \right] \right\} + O(\epsilon^2),$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2}}, \quad x_3 = \sqrt{\frac{1 - \beta_{12}}{1 + \beta_{12}}},$$

$$f(x) = \text{Li}_2(1 - x) + \frac{1}{4} \ln^2 x.$$

ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В с.ц.и. получаем (здесь и далее мы кладём $m = 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) &= \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\ &+ \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ \frac{4(3 + \beta^4)}{s\beta^2} \left[4\text{Li}_3(1 - z) - 2\text{Li}_3(-z) - (2\text{Li}_2(1 - z) - \text{Li}_2(-z)) \ln z - \frac{3}{2}\zeta_3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{16}{3s\beta} \left[\ln^3 z + \pi^2 \ln z \right] - \frac{4}{\beta} \left(s - 2 + \frac{16}{3s} - \frac{8}{s^2} \right) \left[\text{Li}_2(-z) + \frac{1}{2} \ln s \ln z \right] \\ &\quad \left. - \left(s\beta^2 + \frac{7}{\beta^2} - \frac{2\beta^2 + \beta^4}{3} \right) \ln^2 z + \frac{(s - 4/s)\beta^2 \pi^2}{3} + \frac{8(2 + \beta^2)}{3s\beta} \ln z + \frac{8}{3s} \right\}, \end{aligned}$$

где $\beta = \sqrt{1 - 4/s}$, $z = \frac{1-\beta}{1+\beta}$, а \mathcal{S} символ симметризации по замене $\beta \rightarrow -\beta$,

$$\mathcal{S} [F(z, \beta)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [F(z, \beta) + F(z^{-1}, -\beta)]$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{s\beta} \left[-\frac{3-\beta^4}{\beta} \ln z - 2(2 - \beta^2) \right]$ – борновское сечение $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

СЕЧЕНИЕ ТРЁХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ

В с.ц.и. получаем (здесь и далее мы кладём $m = 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) &= \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\ &+ \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ \frac{4(3 + \beta^4)}{s\beta^2} \left[4\text{Li}_3(1 - z) - 2\text{Li}_3(-z) - (2\text{Li}_2(1 - z) - \text{Li}_2(-z)) \ln z - \frac{3}{2}\zeta_3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{16}{3s\beta} \left[\ln^3 z + \pi^2 \ln z \right] - \frac{4}{\beta} \left(s - 2 + \frac{16}{3s} - \frac{8}{s^2} \right) \left[\text{Li}_2(-z) + \frac{1}{2} \ln s \ln z \right] \\ &\quad \left. - \left(s\beta^2 + \frac{7}{\beta^2} - \frac{2\beta^2 + \beta^4}{3} \right) \ln^2 z + \frac{(s - 4/s)\beta^2 \pi^2}{3} + \frac{8(2 + \beta^2)}{3s\beta} \ln z + \frac{8}{3s} \right\}, \end{aligned}$$

где $\beta = \sqrt{1 - 4/s}$, $z = \frac{1-\beta}{1+\beta}$, а \mathcal{S} символ симметризации по замене $\beta \rightarrow -\beta$,

$$\mathcal{S}[F(z, \beta)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [F(z, \beta) + F(z^{-1}, -\beta)]$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{s\beta} \left[-\frac{3-\beta^4}{\beta} \ln z - 2(2 - \beta^2) \right]$ – борновское сечение $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

Заметим, что $\beta\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0)$ является аналитической функцией β^2 , т.е., раскладывается в степенной ряд по $s - 4$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi \alpha (1 + \beta^2)}{2\beta} \sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3 - \beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16 - 5\beta^2 - \beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 & + \frac{4(1 + \beta^2)(2 - \beta^2)}{\beta} \text{Li}_2(1 - z) + \left[\frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[\ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 & - (3 - \beta^2) \left[\text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1 + \beta^2)(3 - \beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1 - z) \ln z \\
 & + \frac{4(2s^2 - s - 9)}{s^2\beta} \left[-2\text{Li}_3 \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8} \ln^2 s \ln z - \frac{1}{6} \ln^3 z - \frac{\pi^2}{8} \ln z \right] \\
 & + \frac{24(s^2 + s - 3)}{s^2\beta} \Re \left[2\text{Li}_3 \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{z+1} \right) + 2 \ln(1+z) \text{Li}_2 \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+z} \right) - \frac{1}{4} \text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left(\ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi\alpha(1+\beta^2)}{2\beta}\sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{1+\beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3-\beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16-5\beta^2-\beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 + \frac{4(1+\beta^2)(2-\beta^2)}{\beta} & \text{Li}_2(1-z) + \left[\frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[\ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 - (3-\beta^2) & \left[\text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1+\beta^2)(3-\beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1-z) \ln z \\
 + \frac{4(2s^2-s-9)}{s^2\beta} & \left[-2\text{Li}_3\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8}\ln^2 s \ln z - \frac{1}{6}\ln^3 z - \frac{\pi^2}{8} \ln z \right] \\
 + \frac{24(s^2+s-3)}{s^2\beta} & \Re \left[2\text{Li}_3\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{z+1}\right) + 2\ln(1+z) \text{Li}_2\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+z}\right) - \frac{1}{4}\text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left(\ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

$\beta\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0)$ не является аналитической функцией β^2 из-за отмеченного члена. Заметим, что $v = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$ — относительная скорость электрона и позитрона и отмеченный член как раз появляется от разложения фактора Зоммерфельда—Сахарова. Замечательно, что $\frac{\pi\alpha}{v}$ умножается на борновское сечение, **точное по $\beta!$**

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi \alpha (1 + \beta^2)}{2\beta} \sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(-\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3 - \beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16 - 5\beta^2 - \beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 + \frac{4(1 + \beta^2)(2 - \beta^2)}{\beta} & \text{Li}_2(1 - z) + \left[\frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[\ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 - (3 - \beta^2) & \left[\text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1 + \beta^2)(3 - \beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1 - z) \ln z \\
 + \frac{4(2s^2 - s - 9)}{s^2\beta} & \left[-2\text{Li}_3\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8}\ln^2 s \ln z - \frac{1}{6}\ln^3 z - \frac{\pi^2}{8}\ln z \right] \\
 + \frac{24(s^2 + s - 3)}{s^2\beta} \Re & \left[2\text{Li}_3\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{z+1}\right) + 2\ln(1+z) \text{Li}_2\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+z}\right) - \frac{1}{4}\text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left(\ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Заметим также, что, в отличие от сечения трёхфотонной аннигиляции, выражение имеет формальную сингулярность при $s = 1$ (эта точка находится ниже порога). Сингулярность дифференциальных уравнений в $s = 1$ привела также и к появлению комплексных полилогарифмов, связанных с корнем шестой степени из единицы.

АСИМПТОТИКИ

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \underbrace{\frac{2\alpha^3}{3\beta} (\pi^2 - 9)}_{\text{СГ орто}} + \frac{\alpha^3}{3} \beta \left(-4 \ln \omega_0 - \frac{31\pi^2}{12} + 16 \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma} = & \underbrace{\frac{\pi\alpha^2}{2\beta}}_{\text{СГ пара}} \beta + \underbrace{\frac{\pi^2\alpha^3}{4\beta^2}}_{\text{С Сах.-Зом.}} + \underbrace{\frac{\alpha^3}{8\beta} (\pi^2 - 20)}_{\text{СГ пара}} \\ & + \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi^2\alpha^3}{2} - \frac{\alpha^3}{36} \beta \left(-48 \ln \omega_0 + 3\pi^2 + 80 \right) + \dots \end{aligned}$$

В согласии с известными членами пороговой асимптотики.

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} \\ + \frac{\alpha^3}{s^2} \left\{ 8(\ln s - 1)(4 \ln s - 5) \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{20}{3} \ln^3 s - 30 \ln^2 s + 14 \ln s + \frac{29}{3} + \frac{2\pi^2}{9} (30 \ln s - 29) + 8\zeta_3 \right\} + \dots$$

Имея в распоряжении точные формулы, мы можем вычислить и субведущие члены асимптотики, и, в частности, определить точность главного члена.

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Berends and Kleiss, 1981}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Eidelman and Kuraev, 1978}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

Все три результата отличаются константой!

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Berends and Kleiss, 1981}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Eidelman and Kuraev, 1978}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

Все три результата отличаются константой!

Поскольку мы вычислили вероятность излучения фотона в произвольной системе, мы можем также получить и сечение в с.п. электрона:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6}(\ln s + 3) + \frac{1}{2}(\ln s - 7)(\ln s - 2) \ln s \right\} + \dots$$

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{[Berends and Kleiss, 1981]}} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{[Eidelman and Kuraev, 1978]}} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

Все три результата отличаются константой!

Поскольку мы вычислили вероятность излучения фотона в произвольной системе, мы можем также получить и сечение в с.п. электрона:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6}(\ln s + 3) + \frac{1}{2}(\ln s - 7)(\ln s - 2) \ln s \right\} + \dots$$

Этот результат совпадает с [Andreassi et al., 1962]!

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

Обе работы [Eidelman and Kuraev, 1978] и [Berends and Kleiss, 1981] использовали приближённую формулу дифф. сечения, полученную из точной [Mandl and Skyrme, 1952]:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} \propto d\Gamma_3 \left\{ \frac{(k_2 \cdot p_1)^2 + (k_2 \cdot p_2)^2}{(k_1 \cdot p_1)(k_1 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_2)} - \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{k_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1 (k_3 \cdot p_2)^2} - \frac{k_2 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2 (k_3 \cdot p_1)^2} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

При больших углах второй член подавлен (относительно первого) множителем $1/\gamma^2 = 4m^2/s$, однако эта малость компенсируется при направлениях k_3 , квазипараллельных оси соударения благодаря квадрату $(k_3 \cdot p)$ в знаменателе (т.к., квадрата малости “хватает” чтобы скомпенсировать и малость телесного угла $d^2\theta_3 \sim 1/\gamma^2$, и внешний множитель $\frac{1}{\gamma^2}$).

Остальные члены, имеющие формальный порядок $\sim \frac{1}{\gamma^2}$ были опущены.

Было проверено, что прямое интегрирование указанного выражения приводит к результату работы [Berends and Kleiss, 1981] (т.о., [Eidelman and Kuraev, 1978] видимо, содержит ещё и техническую ошибку).

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

Обе работы [Eidelman and Kuraev, 1978] и [Berends and Kleiss, 1981] использовали приближённую формулу дифф. сечения, полученную из точной [Mandl and Skyrme, 1952]:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} \propto d\Gamma_3 \left\{ \frac{(k_2 \cdot p_1)^2 + (k_2 \cdot p_2)^2}{(k_1 \cdot p_1)(k_1 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_2)} - \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{k_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1 (k_3 \cdot p_2)^2} - \frac{k_2 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2 (k_3 \cdot p_1)^2} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

При больших углах второй член подавлен (относительно первого) множителем $1/\gamma^2 = 4m^2/s$, однако эта малость компенсируется при направлениях k_3 , квазипараллельных оси соударения благодаря квадрату $(k_3 \cdot p)$ в знаменателе (т.к., квадрата малости “хватает” чтобы скомпенсировать и малость телесного угла $d^2\theta_3 \sim 1/\gamma^2$, и внешний множитель $\frac{1}{\gamma^2}$).

Остальные члены, имеющие формальный порядок $\sim \frac{1}{\gamma^2}$ были опущены.

Было проверено, что прямое интегрирование указанного выражения приводит к результату работы [Berends and Kleiss, 1981] (т.о., [Eidelman and Kuraev, 1978] видимо, содержит ещё и техническую ошибку).

Однако, тщательный анализ показывает, что необходимо учитывать члены

$$d\Gamma_3 \left\{ - \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(p_1 \cdot p_2)}{(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_2)} + \frac{(p_1 \cdot p_2)}{(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_1)} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

которые дают вклад в области, когда все три фотона имеют импульсы, квазипараллельные оси соударения (точнее, два квазипараллельны, а один квази-антипараллелен). В этом случае малость $\frac{1}{\gamma^2} d^2\theta_2 d^2\theta_3 \sim \frac{1}{\gamma^6}$ компенсируется малостью всех трёх знаменателей.

Было проверено, что учёт этих членов даёт в точности добавку $-\frac{4\alpha^3 m^2}{3s}$ к полному сечению, в согласии с асимптотикой результата, полученного в настоящей работе.

Используя полученные результаты, можно получить и асимптотику полного сечения $e^+e^- \rightarrow \text{ФОТОНЫ}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{ФОТОНЫ}} = & \frac{\alpha^3}{s} \left[\frac{\ln^3 s}{3} - \frac{\ln^2 s}{2} + \frac{2}{3} \pi^2 \ln s - 2 \ln s - \frac{3\pi^2}{2} + 4 \right] \\ & + \frac{\alpha^3}{s^2} \left[\frac{4 \ln^3 s}{3} + 2 \ln^2 s + \frac{34}{3} \pi^2 \ln s - 34 \ln s + 20\zeta_3 - \frac{76\pi^2}{9} + \frac{47}{3} \right] + \dots \end{aligned}$$

Главный член совпадает с [Andreassi et al., 1962]!

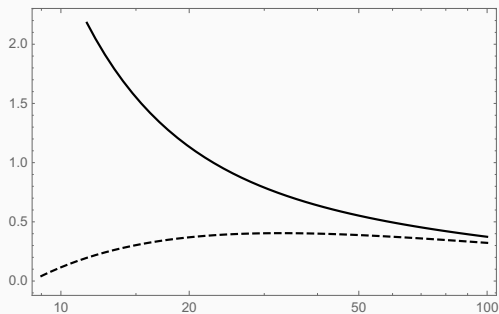


Рис.: Поправка $\propto \alpha^3$ к полному сечению $e^+e^- \rightarrow \text{ФОТОНЫ}$ и её главная асимптотика, в единицах α^3/m^2 как функция от s/m^2 .

- Современные методы многопетлевых вычислений, основанные на IBP приведении и методе дифф. уравнений, эффективны и для вычисления интегралов по многочастичному фазовому объёму.
- В настоящей работе впервые вычислены борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ и радиационная поправка к процессу $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ при произвольных энергиях сталкивающихся частиц. Результаты выражаются через полилогарифмические функции Li_n . Были вычислены асимптотики полученных результатов вблизи порога и при больших энергиях и выполнено их сравнение с имеющимися результатами.
- Сравнение высокоэнергетической асимптотики показало несогласие с имеющимися результатами для с.ц.и. ([Eidelman and Kuraev, 1978, Berends and Kleiss, 1981]). Найдена причина несогласия с последней работой: пропущенные члены в дифференциальном сечении, дающие вклад в трижды коллинеарной области. Асимптотика в с.п. электрона совпала с результатами работы [Andreassi et al., 1962].

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

- G Andreassi, Giorgio Calucci, G Furlan, G Peressutti, and P Cazzola. Radiative corrections to the total cross section for annihilation of a pair into photons. *Physical Review*, 128(3):1425, 1962.
- Frits A Berends and R Kleiss. Distributions for electron-positron annihilation into two and three photons. *Nuclear Physics B*, 186(1):22–34, 1981.
- S. I. Eidelman and E. A. Kuraev. $e^+ e^-$ Annihilation Into Two and Three Photons at High-Energy. *Nucl. Phys.*, B143:353–364, 1978. doi: 10.1016/0550-3213(78)90030-5.
- Johannes M. Henn. Multiloop integrals in dimensional regularization made simple. *Phys.Rev.Lett.*, 110(25):251601, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.251601.
- A. V. Kotikov. Differential equation method: The Calculation of N point Feynman diagrams. *Phys. Lett.*, B267:123–127, 1991. doi: 10.1016/0370-2693(91)90536-Y. [Erratum: *Phys. Lett.*B295,409(1992)].
- Roman N. Lee. LiteRed 1.4: a powerful tool for reduction of multiloop integrals. *J. Phys. Conf. Ser.*, 523:012059, 2014. doi: 10.1088/1742-6596/523/1/012059.
- Roman N. Lee. Reducing differential equations for multiloop master integrals. *J. High Energy Phys.*, 1504:108, 2015. doi: 10.1007/JHEP04(2015)108.
- F Mandl and THR Skyrme. The theory of the double compton effect. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 215(1123):497–507, 1952.
- Giulio Racah. Sulla nascita degli elettroni positivi. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 11(7):477–481, 1934. ISSN 1827-6121. doi: 10.1007/BF02959919. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02959919>.
- Ettore Remiddi. Differential equations for Feynman graph amplitudes. *Nuovo Cim.*, A110:1435–1452, 1997.