

Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН

НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ КАК ПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ ...

**Д.КАЗАКОВ
БЛТФ ОИЯИ**

Академгородок, Новосибирск, 10 -12 марта 2020

Преамбула:

- Неперенормируемые теории, включая гравитацию в $D=4$, считаются не приемлемыми и не поддаются систематическому анализу
- Причина состоит в том, что:
 - ультрафиолетовые расходимости порождают новые структуры, отсутствующие в исходном лагранжиане, и содержат бесконечный произвол
 - амплитуды рассеяния (в ТВ) растут с энергией и нарушают унитарность

Главные тезисы:

- Стандартная теория перенормировок, разработанная для перенормируемых теорий, является избыточной
- Если потребовать конечности только наблюдаемых (элементов S -матрицы), то можно построить согласованный формализм для УФ расходимостей
- Рост амплитуд рассеяния с энергией следует изучать после суммирования ведущих логарифмов - обобщение уравнений РГ

Утверждение I:

- В любой локальной квантовой теории поля, независимо от того, является ли она перенормируемой или нет, все УФ расходимости в функциях Грина как вне так и на массовой поверхности устраняются введением локальных контрчленов в лагранжиан

$$\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$$

(R- операция Боголюбова-Парасюка-Хеппа-Циммермана)

Локальность контрчленов предполагает сокращение нелокальных вкладов в каждом порядке ТВ, что накладывает условия на ведущие расходимости. Это равно справедливо и в неперенормируемых теориях!

БПХЦ R-операция

(используется размерная регуляризация)

$$\mathcal{R}'G_n = \frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + \dots + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^\epsilon}{\epsilon^n} +$$

полюса низшего порядка

$A_k^{(n)}(\mu^2)^{k\epsilon}$ - вклад (n-k) петлевых контрчленов

Требование: $R'G_n$ локально, т.е. члены вида $\log^k \mu^2 / \epsilon^m$ должны сокращаться для любых k и m

Следствие:

$$A_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{A_1^{(n)}}{n}$$

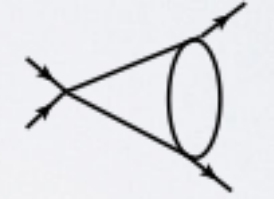
$$KR'G_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k^{(n)}}{\epsilon^n} \right) \equiv \frac{A_n^{(n)'}}{\epsilon^n} \quad A_n^{(n)'} = (-1)^{n+1} A_n^{(n)} = \frac{A_1^{(n)}}{n}.$$

$A_1^{(n)}$ - есть вклад в лидирующую расходимость в n-петлях от диаграмм появляющихся в результате R-операции после вычитания (n-1)-петлевых контрчленов

Лидирующие расходимости управляются 1-петлевыми диаграммами!

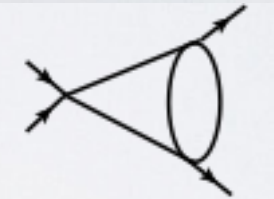
Двух-петлевой пример

ϕ_4^4



$$= \left(\frac{A_2^{(2)}}{\epsilon^2} + \frac{A_1^{(2)}}{\epsilon} \right) \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^{2\epsilon}$$

$\mathcal{R}'$



$$= \text{triangle with bubble} - \text{box} - \text{bubble in circle} = \left(\frac{A_2^{(2)}}{\epsilon^2} + \frac{A_1^{(2)}}{\epsilon} \right) \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^{2\epsilon} - \frac{A_1^{(1)}}{\epsilon} \left(\frac{\mu^2}{s} \right)^{\epsilon} \frac{A_1^{(1)}}{\epsilon}$$

$$= \frac{A_2^{(2)}}{\epsilon^2} - \frac{(A_1^{(1)})^2}{\epsilon^2} + \underbrace{2 \frac{A_2^{(2)}}{\epsilon} \log(\mu^2/s) - \frac{(A_1^{(1)})^2}{\epsilon} \log(\mu^2/s)}_{\text{нелокальные члены должны сокращаться}} = -\frac{1}{2} \frac{(A_1^{(1)})^2}{\epsilon^2} + \dots$$

нелокальные члены должны сокращаться

Лидирующие расходимости даются одно-петлевым членом

$$A_2^{(2)} = \frac{1}{2} (A_1^{(1)})^2$$

ϕ_D^4

- Эти утверждения универсальны и справедливы также и в перенормируемом случае.
- Единственная разница состоит в том, контрчлен $A_1^{(1)}$ зависит от кинематики и должен интегрироваться в оставшемся 1-петлевом графе
- Как результат $A_2^{(2)}$ не является более квадратом $A_1^{(1)}$, а есть проинтегрированный квадрат
- Это утверждение имеет место в любой КТП, независимо от перенормируемости

Утверждение II:

- Условие локальности позволяет получить рекуррентные соотношения, связывающие между собой ведущие расходимости в n и $(n-1)$ петлях и тем самым выразить все ведущие расходимости через однопетлевые

Эту операцию можно продолжить и выразить все подведущие расходимости через двух-петлевым расходимости и т.д. Это равно справедливо и в неперенормируемых теориях!

Рекуррентные соотношения для ведущих расходимостей

Bork, Kazakov, Kompaneets, Vlasenko, 13

Borlakov, Kazakov, Tolkachev, Vlasenko, 15

$$n \text{ } \text{A}_n = -2 \text{ } \text{A}_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \text{A}_k \text{ } \text{A}_{n-1-k}$$

- Это общее рекуррентное соотношение является следствием локальности контрчленов в любой теории
- В перенормируемых теориях коэффициенты A_n являются константами и это соотношение сводится к алгебраическому
- В неперенормируемых теориях коэффициенты A_n являются полиномами по кинематическим переменным и требуется интегрирование сквозь однопетлевые диаграммы

$$\phi_D^4$$

$$D = 4, 6, 8, 10$$

$$[\lambda] = 2 - D/2$$

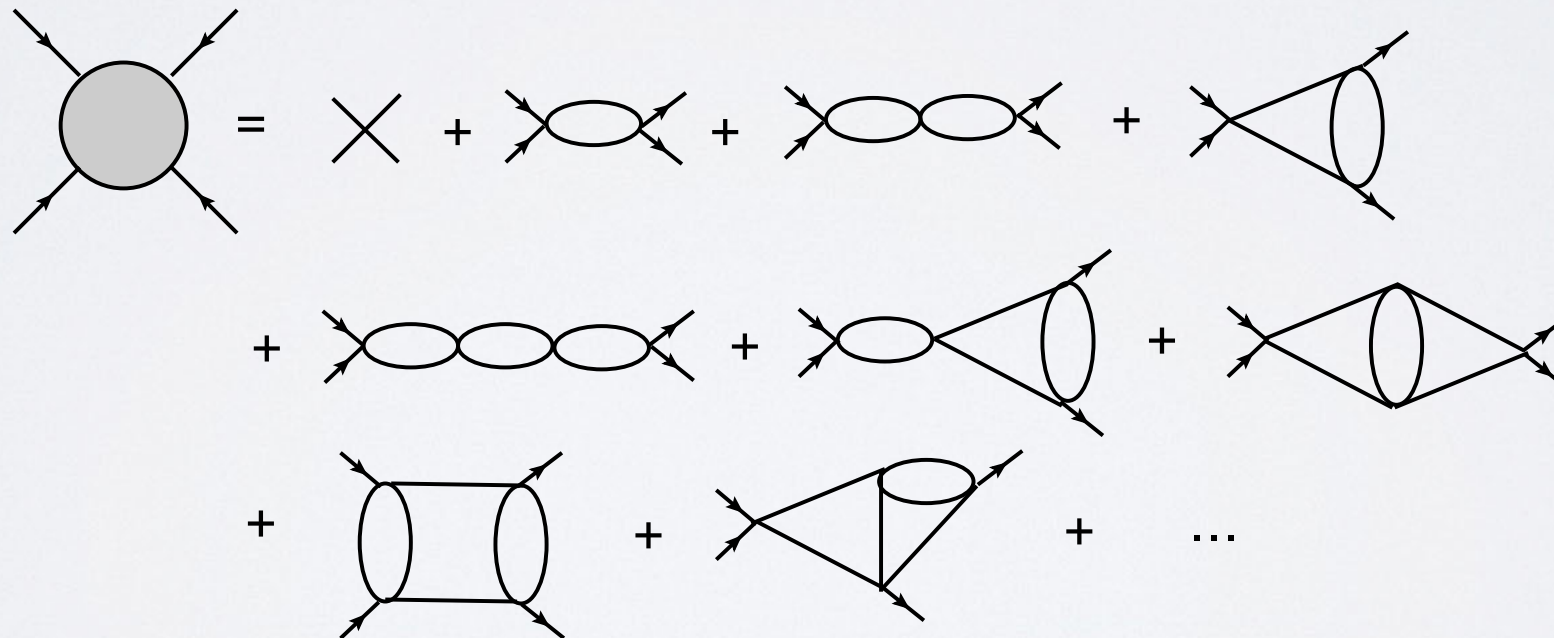
Kazakov, 19

2->2 амплитуда рассеяния на массовой поверхности $m = 0$ $s + t + u = 0$

$$\Gamma_4(s, t, u) = \lambda(1 + \Gamma_s(s, t, u) + \Gamma_t(s, t, u) + \Gamma_u(s, t, u))$$

PT:

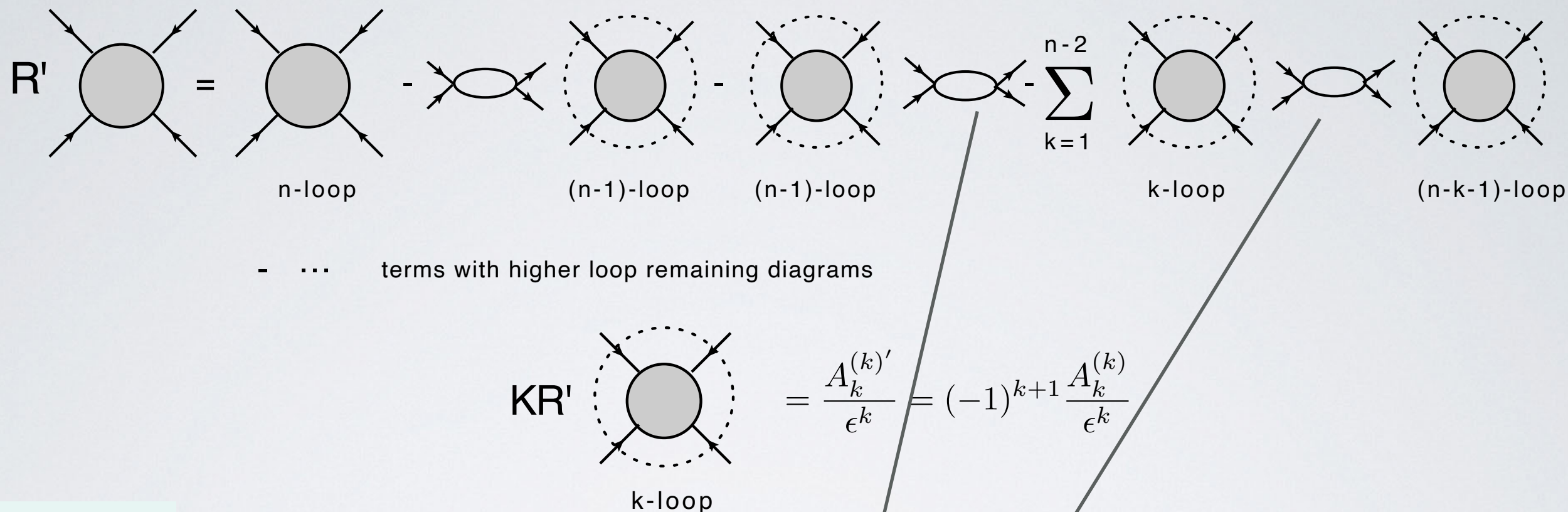
$$\Gamma_s = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n S_n, \quad \Gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n T_n, \quad \Gamma_u = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n U_n, \quad z \equiv \frac{\lambda}{\epsilon}$$



Разложение ТВ (показан только s-канал)

Рекуррентные соотношения для лидирующих полюсов

Kazakov,19



$$\begin{aligned}
 nS_n(s, t, u) &= \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} (S_{n-1}(s, t', u') + T_{n-1}(s, t', u') + U_{n-1}(s, t', u')) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{(D/2-2)k} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p+D/2-2)!} \times \\
 &\times \frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}} (S_k + T_k + U_k) \frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}} (S_{n-k-1} + T_{n-k-1} + U_{n-k-1}) s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
 \end{aligned}$$

$$t' = -xs, u' = -(1-x)s$$

D=4 Перенормируемый случай

$$nS_n = (S_{n-1} + T_{n-1} + U_{n-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} (S_k + T_k + U_k)(S_{n-k-1} + T_{n-k-1} + U_{n-k-1})$$

$$S_n + T_n + U_n = \Gamma_n \qquad \Gamma_1 = 3/2$$

$$n\Gamma_n = 3\Gamma_{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n-2} \Gamma_k \Gamma_{n-k-1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Gamma_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Хорошо известная геометрическая профессия

$$\Gamma(z) = \sum \Gamma_n (-z)^n = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z}$$

Утверждение III:

- Рекуррентные соотношения могут быть превращены в дифференциальные уравнения, которые являются обобщением уравнений РГ на произвольную теорию.

Определяя сумму $\sum_n A_n(-z)^n = A(z)$ можно преобразовать рекуррентные соотношения в интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz} A(z) = -1 - 2 \int_{\Delta} A(z) - \int_{\bigcirc} A^2(z)$$

Это уравнение справедливо в любой, даже неперенормируемой, теории!

- Уравнения РГ являются следствием локальности, имеют общий характер и не содержат «бегущих зарядов», но суммируют все старшие (и последующие) логарифмы, как и в перенормируемых теориях

ϕ_D^4

Дифференциальное уравнение РГ

Kazakov, 19

$$\begin{aligned}
-\frac{d\Gamma_s(s, t, u)}{dz} &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D - 2)} s^{D/2-2} & \Gamma_s(z = 0) = 0 \\
+ \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} [\Gamma_s(s, t', u') + \Gamma_t(s, t', u') + \Gamma_u(s, t', u')] & \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} \\
+ \frac{1}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p + D/2 - 2)!} \times \\
\times \left(\frac{d^p}{dt'^l du'^{p-l}} (\Gamma_s + \Gamma_t + \Gamma_u) \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} \right)^2 s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_s(s, t, u)}{d \log \mu^2} &= -\frac{\lambda}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p + D/2 - 2)!} \times \\
&\times \left(\frac{d^p \bar{\Gamma}_4(s, t', u')}{dt'^l du'^{p-l}} \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} \right)^2 s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_s(\log \mu^2 = 0) = 0$$

Решение уравнения РГ

$$\phi_D^4$$

$$D = 4$$

$$s \sim t \sim u \sim E^2$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_4}{d\log\mu^2} = -\lambda\frac{3}{2}\bar{\Gamma}_4^2, \quad \bar{\Gamma}_4(\log\mu^2 = 0) = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{\Gamma}_4 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\lambda\log(\mu^2/E^2)}$$

Общее решение для произвольного D

$$\bar{\Gamma}_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2-1)}{\Gamma(D-2)} \lambda (s^{D/2-2} + t^{D/2-2} + u^{D/2-2}) \log(\mu^2/E^2)}$$

$\mathcal{P}$ является символом упорядочения в смысле рекуррентного соотношения

$$\Gamma_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{\lambda}{1 + \lambda A_1^{(1)} \log(\mu^2/E^2)} = \mathcal{P} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \log^n(\mu^2/E^2) (A_1^{(1)})^n$$

$$\mathcal{P}(A_1^{(1)})^n = \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{\mathcal{P}(A_1^{(1)})^k} A_1^{(1)} \overleftarrow{\mathcal{P}(A_1^{(1)})^{n-1-k}},$$

Утверждение IV:

- В перенормируемых теориях введение локальных контрчленов эквивалентно умножению амплитуды на константу перенормировка Z с соответствующим умножением константы взаимодействия

2->2 амплитуда рассеяния на массовой поверхности

$$\Gamma_4(s, t, u) = \Gamma_4^{tree} \bar{\Gamma}_4(s, t, u)$$

$$\bar{\Gamma}_4 = 1 + \lambda \dots + \lambda^2 \dots$$

Перенормировка

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_4 &= Z_4(\lambda) \bar{\Gamma}_4^{bare} |_{\lambda_{bare} \rightarrow \lambda Z_4}, \\ \lambda_{bare} &= \mu^\epsilon Z_4(\lambda) \lambda \end{aligned}$$

BPHZ R-operation

$$RG = (1 - K)R'G$$

$$Z = 1 - \sum_i K R' G_i$$

- В неперенормируемых теориях всё остаётся справедливым, но операция умножения заменяется на более сложную процедуру, когда константа Z заменяется на оператор $Z \rightarrow \hat{Z}$, зависящий от кинематических переменных, и при действии его на диаграмму необходимо интегрировать по внутренней петле

Пример ϕ_D^4

$D=6$

$$\Gamma = 1 + \lambda \left(\text{diagram } s + \text{diagram } t + \text{diagram } u \right) + \lambda^2 \dots$$

$$Z = 1 - \lambda \left(\frac{s}{\epsilon} + \frac{t}{\epsilon} + \frac{u}{\epsilon} \right) + \lambda^2 \dots$$

$$Z\Gamma = \dots - \lambda^2 \left(\frac{s}{\epsilon} + \frac{t}{\epsilon} + \frac{u}{\epsilon} \right) \text{diagram}$$

Интегрирование
по петле

«Константа» перенормировка зависит от кинематики и от полей

$$\begin{aligned}
 Z_4 = 1 - \frac{\lambda}{\epsilon} (p^2)^{D/2-2} + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} (p^4)^{D/2-2} - \frac{\lambda^3}{\epsilon^3} (p^6)^{D/2-2} + \dots &\leftarrow \text{leading order} \\
 + \frac{\lambda^2}{\epsilon} (p^4)^{D/2-2} - \frac{\lambda^3}{\epsilon^2} (p^6)^{D/2-2} + \dots &\leftarrow \text{subleading order} \\
 - \dots & \\
 + \frac{\lambda^2}{\epsilon} (p^2)^{D/2-3} \phi^2 + \dots &\quad (D \geq 6) \\
 - \frac{\lambda^3}{\epsilon} (p^2)^{D/2-4} \phi^4 + \dots &\quad (D \geq 8) \\
 + \dots &
 \end{aligned}$$

Контрчлены с высшими производными и многохвостки

$$\lambda (\partial^{D/2-2} \phi^2)^2$$

$$\lambda^2 (\partial^{D-4} \phi^2)^2$$

$$\lambda^2 (\partial^{D/2-3} \phi^2)^2 \phi^2$$

- Как решить проблему бесконечного произвола связанного с контрчленами новой структуры?
- Отказаться от условия нормировки всех существующих операторов и нормировать произвольно выбранную амплитуду рассеяния в которую дают вклад все появляющиеся операторы!

- В перенормируемой теории в каждом порядке ТВ возникает произвол вычитания УФ расходимостей. Этот бесконечный произвол собирается в одну константу перенормировки одного оператора

$$Z = 1 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \dots$$

и фиксируется одним условием на нормировку этого оператора

- В неперенормируемом случае константа Z переопределяет бесконечную цепочку операторов

$$Z = 1 + \lambda c_1 (p^2)^{D/2-2} + \lambda^2 c_2 (p^2)^{D-4} + \lambda^2 c_3 (p^2)^{D/2-3} \phi^2 \dots$$

- Это не есть перенормировка константы перед одним оператором, а перенормировка всей бесконечной цепочки операторов
- Выбор констант c_k является выбором схемы перенормировки, которая фиксируется одним условием, но не нормировкой одного оператора, как в перенормируемом случае, а нормировкой одной амплитуды.

Заключение

- Стандартная теория перенормировок, разработанная для перенормируемых теорий, является избыточной
- Если потребовать конечности только наблюдаемых (элементов S -матрицы), то можно построить согласованный формализм для УФ расходимостей
- Рост амплитуд рассеяния с энергией следует изучать после суммирования ведущих логарифмов - обобщение уравнений РГ