

Сокращение главных вкладов в радиационные поправки к сечению упругого ер-рассеяния в экспериментах по измерению зарядового радиуса протона

Герасимов Р. Е., Фадин В. С.

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

12 марта 2020 г. Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН

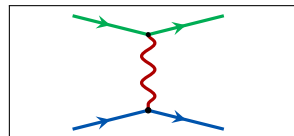
Эксперимент по измерению зарядового радиуса протона

- Эксперимент, предложенный Воробьевым А.А. (ПИЯФ) [Phys.Part.Nucl.Lett. 16 (2019) 5, 524]:
 - измерение дифференциального по передаче импульса сечения упругого ер-рассеяния
 - при энергии налетающих электронов $E = 720 \text{ MeV}$
 - для передач импульса $0.001 \leq Q^2 \leq 0.04 \text{ GeV}^2$
 - регистрация протона отдачи
- условия эксперимента

$$E \simeq E' \sim M, \quad m^2 \ll Q^2 \ll E^2, \quad EM,$$

$$E'_p = M + \frac{Q^2}{2M}, \quad E' = E - \frac{Q^2}{2M}$$

где E, E' — энергия начального и конечного электрона в упругом процессе, E'_p — энергия протона отдачи, M, m — массы протона и электрона.



\mathcal{M}_B

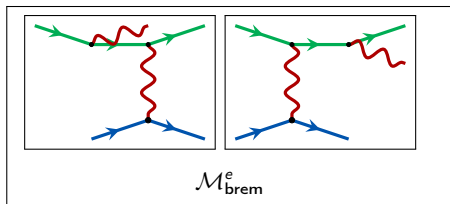
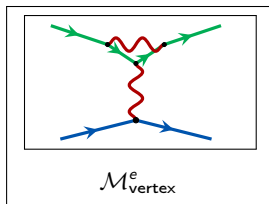
$$\frac{d\sigma_B}{dQ^2} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} G_E^2(Q^2),$$

$G_E(Q^2)$ — электрический формфактор протона

$$G_E(Q^2) \approx 1 - \frac{\langle R_E^2 \rangle}{6} Q^2$$

$\langle R_E^2 \rangle$ — зарядовый радиус ($0.84(\mu\text{H}, \text{H}, \text{ep}) - 0.88(\text{ep}, \text{H}) \text{ fm}$)

Радиационные поправки



- учет радиационных поправок

$$d\sigma = d\sigma_B(1 + \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{real}})$$

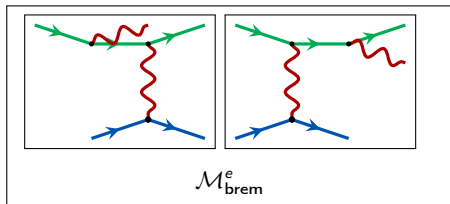
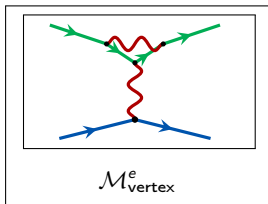
- поправка к электронной вершине (λ — «масса» фотона)

$$\delta_{\text{vertex}}^e = -\frac{\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{Q^2}{m^2} - \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 \right]$$

- излучение мягких фотонов с частотой $\omega < \omega_0$

$$\delta_{\text{soft}}^e = \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) - 1 \right) \ln \left(\frac{4\omega_0^2}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{4E^2}{m^2} \right) - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{4E'^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{4EE'}{Q^2} \right) + \ln \left(\frac{4EE'}{m^2} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{Q^2}{4EE'} \right) - \frac{\pi^2}{3} \right]$$

Поправка к вершине + излучение мягких фотонов



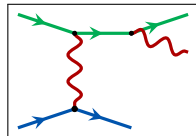
- поправка к вершине + излучение мягких фотонов (в первой строке основной вклад)

$$\delta_{\text{vertex}}^e + \delta_{\text{soft}}^e = \frac{\alpha}{\pi} \left[- \left(\ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) - 1 \right) \ln \left(\frac{EE'}{\omega_0^2} \right) + \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} - 2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{E}{E'} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{Q^2}{4EE'} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right],$$

- сумма вкладов содержит коллинеарные логарифмы $\ln \frac{Q^2}{m^2}$,
- необходимо учесть вклад излучения “жестких” фотонов
- в общем случае $\ln \frac{Q^2}{m^2}$ остаются и после учета излучения жестких фотонов

Тормозное излучение. Метод квазиреальных электронов

- Метод квазиреальных электронов (Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A. Nucl.Phys. B 65 (1973) 381) дает простую физическую картину: сечение тормозного излучения — сумма вкладов от излучения начальным и конечным электронами
- излучение конечным электроном (здесь l', E' — 4-импульс и энергия электрона в упругом процессе, k, ω — 4-импульс и частота фотона)



$\mathcal{M}_{f.e.e.}$

$$\frac{\omega d\sigma^{f.e.e.}}{d^3k} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \left(\frac{E'^2 + (E' - \omega)^2}{\omega E'(k \cdot l')} - \frac{m^2}{(k \cdot l')^2} \frac{(E' - \omega)}{E'} \right) d\sigma_B,$$

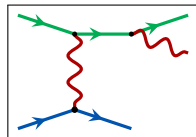
с логарифмической точностью верхний предел по углу излучения фотона принимаем равным углу рассеяния в упругом процессе (возникает $\ln \frac{Q^2}{m^2}$)

$$\frac{x d\sigma^{f.e.e.}}{dx} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} (1 + (1 - x)^2) d\sigma_B, \quad x = \omega/E'$$

Тормозное излучение. Метод квазиреальных электронов

- излучение конечным электроном проинтегрированное по частоте фотона от ω_0 до E'

$$d\sigma^{f.e.e.} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} \left(\ln \frac{E'}{\omega_0} - \frac{3}{4} \right) d\sigma_B .$$



$\mathcal{M}_{f.e.e.}$

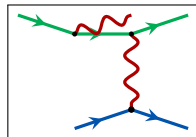
- сокращает коллинеарные логарифмы с коэффициентом $\ln \frac{E'}{\omega_0}$ и половину вклада с независимым от энергии коэффициентом при добавлении к

$$\delta_{vertex}^e + \delta_{soft}^e \approx \frac{\alpha}{\pi} \left[- \left(\ln \left(\frac{Q^2}{m^2} \right) - 1 \right) \ln \left(\frac{EE'}{\omega_0^2} \right) + \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} - 2 \right]$$

- дальше покажем, что учет излучения начальным электроном сокращает оставшиеся вклады, содержащие $\ln \frac{Q^2}{m^2}$

Тормозное излучение. Метод квазиреальных электронов

- излучение начальным электроном меняет энергию начального электрона и сечение процесса инициированного электроном после излучения (l, E — 4-импульс и энергия начального электрона)



$\mathcal{M}_{i.e.e.}$

$$d\sigma^{i.e.e.} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} \int_{\omega_0/E}^{x_m} \frac{dx}{x} (1 + (1-x)^2) d\sigma_B \Big|_{\vec{l} \rightarrow \vec{l}(1-x)},$$

$$x = \omega/E, \quad x_m = 1 - \frac{\sqrt{Q^2(Q^2+4M^2)+Q^2}}{4EM}.$$

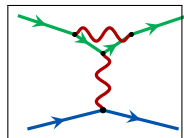
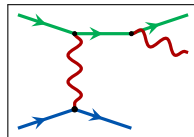
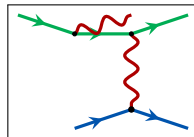
- в большинстве экспериментов сокращение радиационных поправок не происходит
- тем не менее в рассматриваемой постановке $d\sigma_B/dQ^2$ не зависит от энергии электрона и вклад $d\sigma^{i.e.e.}$ такой же как $d\sigma^{f.e.e.}$
- Т.о. метод квазиреальных электронов позволяет показать сокращение РП с логарифмической точностью

Сокращение в радиационных поправках.

- сокращение происходит не только с логарифмической точностью, но и члены, не содержащие коллинеарные логарифмы, также сокращаются, первая поправка пропорциональна $\frac{Q}{E}$

$$\delta_{\text{vertex}}^e + \delta_{\text{soft}}^e + \delta_{\text{hard}}^e = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{Q}{4E} \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} + \ln \frac{4E^2}{m^2} + 1 \right)$$

- приближенными методами получить этот результат нельзя, требуется расчет сечения тормозного излучения

 $\mathcal{M}_{\text{vertex}}^e$  $\mathcal{M}_{\text{f.e.e.}}$  $\mathcal{M}_{\text{i.e.e.}}$

Тормозное излучение.

- для процесса $e(l) + p(p) \rightarrow e(l') + p(p') + \gamma(k)$, в котором электроном излучается фотон $\omega > \omega_0$ используем

$$\frac{d\sigma_{\text{brem}}^e}{M d\omega dQ^2} = \frac{1}{512\pi^4((p \cdot l)^2 - m^2 M^2)} \int d\kappa d\kappa' \frac{\bar{\sum} |\mathcal{M}_{\text{brem}}^e|^2}{\sqrt{-S}},$$

где $\kappa = (k \cdot l)$, $\kappa' = (k \cdot l')$, S - кинематический инвариант (детерминант Грама $\{l, p, l', k\}$), $q = p - p'$ - передача импульса, $Q^2 = -q^2$

- квадрат матричного элемента

$$\bar{\sum} |\mathcal{M}_{\text{brem}}^e|^2 = \frac{16M^2 e^6}{Q^4} \left\{ \frac{4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2}{4M^2 + Q^2} \left[X_1 - \frac{1}{2} X_2 \right] + G_M^2 \frac{Q^2}{4M^2} X_2 \right\},$$

где E, E' -энергии начального и конечного электронов, $G_E(Q^2), G_M(Q^2)$ — формфакторы протона

$$X_1 = \left(\frac{Q^2}{2\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa^2} \right) E'(E - \omega) + \left(\frac{Q^2}{2\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa'^2} \right) E(E' + \omega) - \frac{Q^2}{2M} \left(\frac{E}{\kappa} + \frac{E'}{\kappa'} \right)$$

$$X_2 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{Q^2}{\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa^2} - \frac{m^2}{\kappa'^2} \right) + \left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) + Q^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa'} \right)$$

Тормозное излучение.

- прямое вычисление интегралов позволяет найти дифференциальное по частоте фотона и передаче импульса сечение $\frac{d\sigma_{\text{brem}}^e}{d\omega dQ^2}$
- выделяется 3 области по частоте фотона, интегрирование по которым дает вклад в радиационные поправки

$$\delta_{\text{hard}}^{(I)} = \int_{\omega_0}^{\omega^-} d\omega \left[\frac{d\sigma_{\text{brem}}^e}{d\omega dQ^2} / \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \left(\ln \frac{Q^2}{4\omega_0^2} - \frac{Q}{M} - \frac{Q}{E} \right) \right\}$$

$$\delta_{\text{hard}}^{(II)} = \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega \left[\frac{d\sigma_{\text{brem}}^e}{d\omega dQ^2} / \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{4E^2}{Q^2} - \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{m^2} + 2 \right. \\ \left. + \frac{Q}{M} \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) + \frac{Q}{4E} \ln \frac{4E^4}{m^2 Q^2} + \frac{3Q}{2E} \left(\ln \frac{Q}{E} - 1 \right) \right\}$$

$$\delta_{\text{hard}}^{(III)} = \int_{\omega_+}^{\omega_{\text{max}}} d\omega \left[\frac{d\sigma_{\text{brem}}^e}{d\omega dQ^2} / \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \frac{Q}{4E} \left(\ln \frac{Q^2}{16m^2} + 1 \right)$$

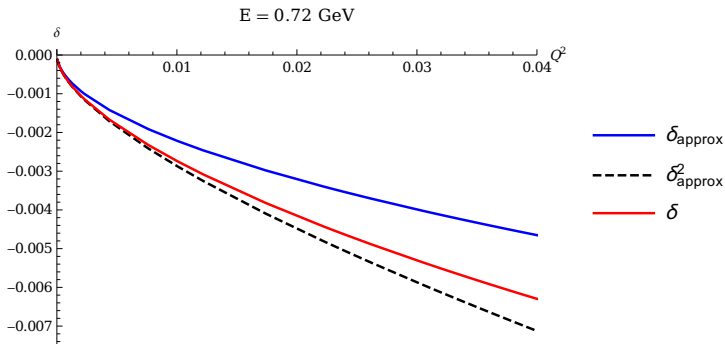
- где $\omega_- = \frac{Q}{2}$, $\omega_+ = E - \frac{Q}{2}$, $\omega_{\text{max}} = E - \frac{Q^2}{2M}$

Сокращение радиационных поправок

- приходим к выражению (с точностью до первых поправок содержащих Q/E)

$$\delta_{\text{vertex}}^e + \delta_{\text{soft}}^e + \delta_{\text{hard}}^e \approx \delta_{\text{approx}} = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{Q}{4E} \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} + \ln \frac{4E^2}{m^2} + 1 \right)$$

- можно сравнить точный результат однопетлевым приближении (требуется только малость массы электрона) и разложение по степеням Q



Метод структурных функций электрона

- сокращение радиационных поправок с логарифмической точностью имеет место и в более высоких порядках
- может быть показано с использованием партонной картины, которая применяется к “глубоконеупругому протон-электронному рассеянию”

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{Q^4} \frac{1}{\sqrt{(p \cdot l)^2 - m^2 M^2}} J^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p},$$

- протонный тензор $P = p + p'$

$$J^{\mu\nu} = G_M^2 (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) + \frac{4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2}{4M^2 + Q^2} P^\mu P^\nu,$$

- тензор “глубоконеупругого рассеяния”

$$W_{\mu\nu}(l, q) = \frac{1}{4\pi} \sum_X \overline{\langle l | j_\nu^{(e,\dagger)}(0) | X \rangle} \langle X | j_\mu^{(e)}(0) | l \rangle (2\pi)^4 \delta(q + l - p_X).$$

Здесь $|l\rangle$ — начальное состояние электрона, X — любое состояние, которое рождается γe -столкновениях

Метод структурных функций электрона

- тензор глубоконеупругого рассеяния через структурные функции электрона

$$W^{\mu\nu}(l, q) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{(lq)} \left(l^\mu - \frac{(l \cdot q)}{q^2} q^\mu \right) \left(l^\nu - \frac{(l \cdot q)}{q^2} q^\nu \right) F_2(x, Q^2),$$

- в результате

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{2x^2 Q^2 ((p \cdot l) - m^2 M^2)} \left[(2Q^2 G_M^2 - 4M^2 G_E^2) F_1(x, Q^2) + \left(-G_M^2 (m^2 Q^2 + (l \cdot q)^2) + \frac{Q^2 G_M^2 + 4M^2 G_E^2}{4M^2 + Q^2} (P \cdot l)^2 \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{(l \cdot q)} \right]$$

$$x = \frac{Q^2}{2(l \cdot q)}, \quad (P \cdot l) = 2ME - \frac{Q^2}{2x}.$$

- свертка тензоров с учетом экспериментальных условий и соотношения Каллана-Гросса $F_2 = 2xF_1$ дает дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} F_2(x, Q^2), \quad x_0 = \frac{Q}{2E} \ll 1.$$

Метод структурных функций электрона

- дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} F_2(x, Q^2),$$

- с логарифмической точностью структурные функции выражаются через партонные распределения в начальном электроне

$$F_2 = x(f_e^e + f_e^{\bar{e}}),$$

- позитронное распределение $f_e^{\bar{e}}$ появляется в двухпетлевом приближении
- электронное распределение при этом равно распределению валентных электронов f_e^v , которое не сингулярно при малых значениях x
- сокращение логарифмических РП имеет простое объяснение на языке партонных распределений

$$\int_0^1 dx f_e^v(x, Q^2) = 1$$

вне зависимости от величины Q^2 , т.к. является следствием сохранения заряда

- Продемонстрировано сокращение главных вкладов в радиационные поправки к сечению упругого ер-рассеяния для экспериментов по измерению зарядового радиуса протона.
- В однопетлевом приближении обнаружено, что сокращение происходит с точностью до членов, не содержащих коллинеарные логарифмы $\ln \frac{Q^2}{m^2}$.
- В однопетлевом приближении вычислен остаточный электронный вклад в радиационные поправки. В рассматриваемой постановке эксперимента он подавлен первой степенью отношения Q/E .
- При использовании метода структурных функций электрона сокращение логарифмических вкладов имеет простое объяснение на языке “партоновых” распределений. Для экспериментальных условий, в которых запрещено рождение электрон-позитронных пар сокращение происходит не только в однопетлевом приближении, но и в более высоких порядках теории возмущений