Теория сильнонелинейной кильватерной волны на основе закона сохранения энергии

Anton Golovanov,[1,2] Igor Kostyukov,[2] Alexander Pukhov,[3] Victor Malka[1]

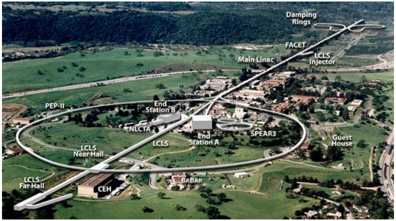
[1]Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel
[2]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия
[3]Institut für Theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Germany

23 марта 2023 г.

Статья: A. Golovanov et al. *PRL* **130**, 105001 (2023)

Плазменные методы ускорения

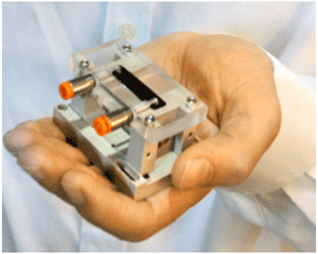
Stanford linear acceleration center (SLAC)



50 ГэВ на 3 км

Ускоряющий градиент ~100 МэВ/м

Плазменные ускорители

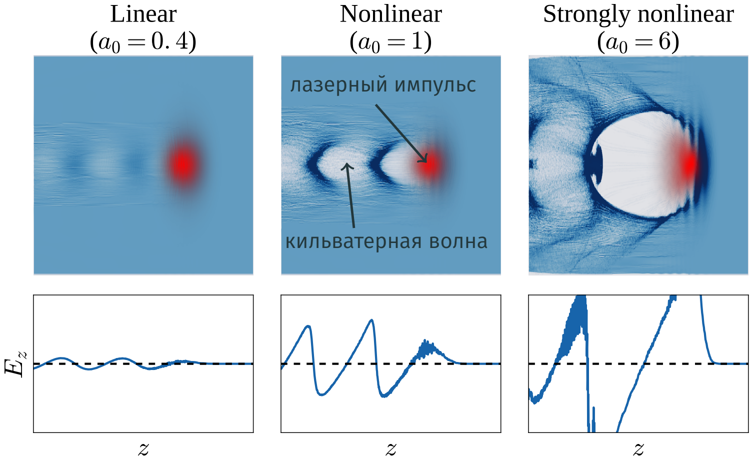


7.8 ГэВ на 20 см.

Ускоряющий градиент ~50 ГэВ/м

Gonsalves *et al.* PRL **122**, 084801 (2019).

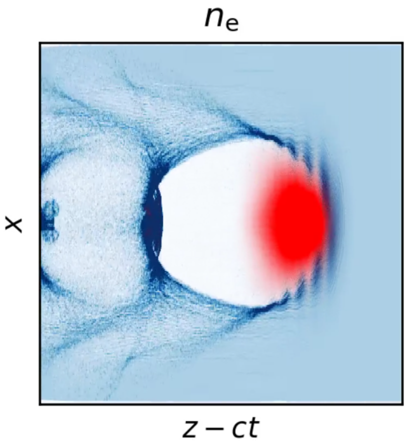
Кильватерная волна в плазме



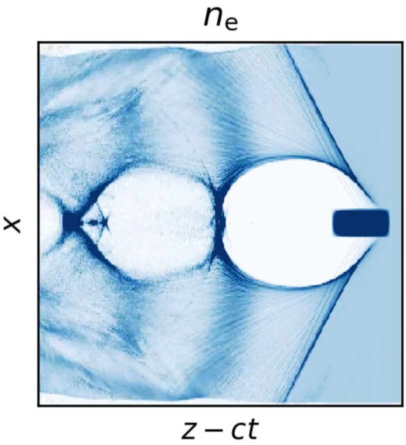
$a_0 = \dfrac{eE_\mathrm{L}}{mc\omega_\mathrm{L}}$ — безразмерная лазерная амплитуда

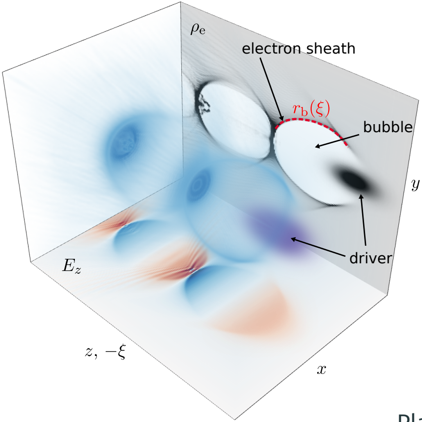
Сильно нелинейный («баббл») режим кильватерной волны

Лазерный драйвер ($a_0 \gg 1$)



Электронный драйвер ($n_B \gg n_p$)





Приближения

- Осевая симметрия, координаты (r, z)
- Квазистатическое приближение: $f(t, z, r) = f(\xi, r), \quad \xi = t - z.$
- У плазменной полости есть граница $r_b(\xi)$, являющаяся электронной траекторией
- При $r < r_b$ нет плазменных электронов; $r \geq r_b$ — электронный слой
- Ионы неподвижны

Plasma units: $t \to \omega_p t$, $\mathbf{r} \to k_p \mathbf{r}$, $\mathbf{E} \to e\mathbf{E}/mc\omega_p$, etc.

Lu et al. *Phys. Plasmas* **13**, 056709 (2006)

Модель Лю: уравнение для границы плазменной полости

Для границы плазменной полости получается уравнение

$$A(r_b)\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + C(r_b) = \lambda(\xi, r_b),$$

где

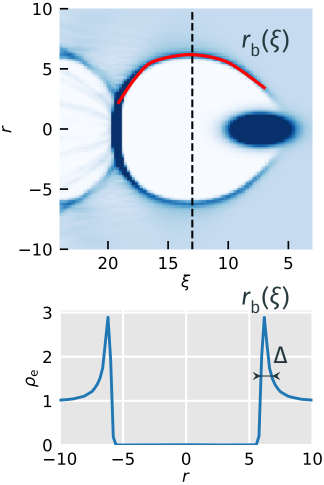
$$A(r_b) = r_b\left(1 + \frac{r_b^2}{4} + \frac{3r_b\Delta}{4}\right)$$

$$B(r_b) = \frac{r_b^2}{2}\left(1 + \frac{\Delta}{r_b}\right)$$

$$C(r_b) = \frac{r_b^2}{4}\frac{1 + (1 + r_b\Delta/2)^2}{(1 + r_b\Delta/2)^2}$$

$$\lambda(\xi, r_b) = -\int_0^{r_b} \rho_e(\xi, r')r'\, dr'$$

$$E_z(\xi) = \frac{r_b + \Delta}{2}\frac{dr_b}{d\xi}$$



Lu et al. *Phys. Plasmas* **13**, 056709 (2006); Golovanov et al. *Quantum electron.* **46**, 295 (2016).

Для границы плазменной полости получается уравнение

$$A(r_b)\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + C(r_b) = \lambda(\xi, r_b),$$

где

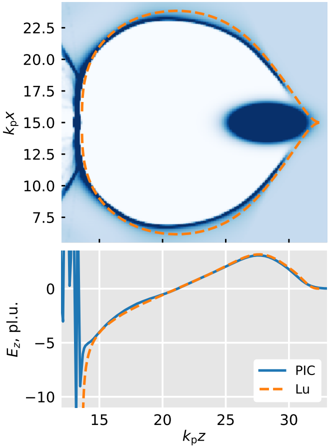
$$A(r_b) = r_b\left(1 + \frac{r_b^2}{4} + \frac{3r_b\Delta}{4}\right)$$

$$B(r_b) = \frac{r_b^2}{2}\left(1 + \frac{\Delta}{r_b}\right)$$

$$C(r_b) = \frac{r_b^2}{4}\frac{1 + (1 + r_b\Delta/2)^2}{(1 + r_b\Delta/2)^2}$$

$$\lambda(\xi, r_b) = -\int_0^{r_b} \rho_e(\xi, r')r'\,dr'$$

$$E_z(\xi) = \frac{r_b + \Delta}{2}\frac{dr_b}{d\xi}$$



Lu et al. *Phys. Plasmas* **13**, 056709 (2006); Golovanov et al. *Quantum electron.* **46**, 295 (2016).

Сохранение энергии в кильватерной волне

ЭМ поле (кильватерное)

$$\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\text{EM}} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$W_{\text{EM}} = \dfrac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$ плотность ЭМ энергии

$\mathbf{S}_{\text{EM}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ вектор Пойнтинга

Сохранение энергии в кильватерной волне

ЭМ поле (кильватерное)

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{EM}} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$W_{\mathrm{EM}} = \dfrac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$ плотность ЭМ энергии

$\mathbf{S}_{\mathrm{EM}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ вектор Пойнтинга

Электроны плазмы

$$\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{e}} = \mathbf{j}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial t} n_{\mathrm{e}} \overline{\gamma^{-1}}$$

$W_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}} \overline{(\gamma - 1)}$ плотность энергии электронов

$\mathbf{S}_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}} \overline{\mathbf{v}(\gamma - 1)}$ плотность потока энергии

$\langle \mathbf{a}^2 \rangle$ пондеромоторный потенциал

Сохранение энергии в кильватерной волне

ЭМ поле (кильватерное)

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}_{\mathrm{EM}} = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

$W_{\mathrm{EM}} = \dfrac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}$ плотность ЭМ энергии

$\mathbf{S}_{\mathrm{EM}} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}$ вектор Пойнтинга

Электроны плазмы

$$\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}_{\mathrm{e}} = \mathbf{j}_{\mathrm{e}}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial\langle\mathbf{a}^2\rangle}{\partial t} n_{\mathrm{e}}\overline{\gamma^{-1}}$$

$W_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}}\overline{(\gamma - 1)}$ плотность энергии электронов

$\mathbf{S}_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}}\overline{\mathbf{v}(\gamma - 1)}$ плотность потока энергии

$\langle\mathbf{a}^2\rangle$ пондеромоторный потенциал

Полная энергия кильватерной волны

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{j}_{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial\langle\mathbf{a}^2\rangle}{\partial t} n_{\mathrm{e}}\overline{\gamma^{-1}}$$

$$W = W_{\mathrm{EM}} + W_{\mathrm{e}} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathrm{EM}} + \mathbf{S}_{\mathrm{e}}$$

В токах $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\mathrm{e}} + \mathbf{j}_{\mathrm{B}}$ есть электроны плазмы ($\mathbf{j}_{\mathrm{e}}$) и внешние сгустки ($\mathbf{j}_{\mathrm{B}}$).

Квазистатическое приближение

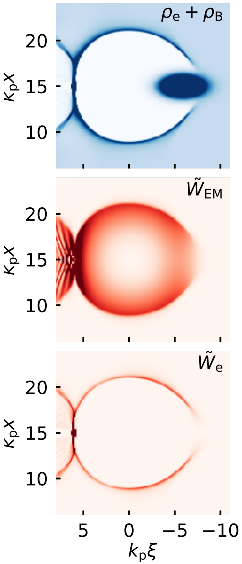
Полная энергия кильватерной волны

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial t} n_\mathrm{e} \overline{\gamma^{-1}}$$

Квазистатическое приближение ($\xi = t - z$)

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} + \nabla_\perp \cdot \mathbf{S}_\perp = -\rho_\mathrm{B} E_z + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial \xi} n_\mathrm{e} \overline{\gamma^{-1}}$$

$\tilde{W} = W - S_z$ — плотность квазиэнергии. Для ультрарелятивистских сгустков: $\mathbf{j}_\mathrm{B} \approx \rho_\mathrm{B} \mathbf{z}_0$



Полная энергия кильватерной волны

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial t} n_\mathrm{e}\overline{\gamma^{-1}}$$

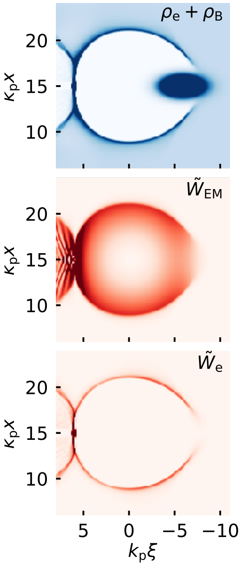
Квазистатическое приближение ($\xi = t - z$)

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} + \nabla_\perp \cdot \mathbf{S}_\perp = -\rho_\mathrm{B} E_z + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial \xi} n_\mathrm{e}\overline{\gamma^{-1}}$$

$\tilde{W} = W - S_z$ — плотность квазиэнергии. Для ультрарелятивистских сгустков: $\mathbf{j}_\mathrm{B} \approx \rho_\mathrm{B}\mathbf{z}_0$

$$\tilde{W}_\mathrm{EM} = \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi_\mathrm{w})^2 + B_z^2\right] \qquad \tilde{W}_\mathrm{e} = n_\mathrm{e}\overline{(\gamma - 1)(1 - v_z)}$$

$\psi_\mathrm{w} = \varphi - A_z$ is кильватерный потенциал.



Квазистатическое приближение

Полная энергия кильватерной волны

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial t} n_\mathrm{e} \overline{\gamma^{-1}}$$

Квазистатическое приближение ($\xi = t - z$)

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} + \nabla_\perp \cdot \mathbf{S}_\perp = -\rho_\mathrm{B} E_z + \frac{1}{2}\frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial \xi} n_\mathrm{e} \overline{\gamma^{-1}}$$

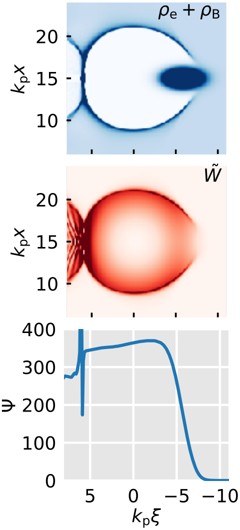
$\tilde{W} = W - S_z$ — плотность квазиэнергии.

Интеграл по поперечной плоскости

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = -\int \rho_\mathrm{B} E_z \, d^2\mathbf{r}_\perp + \frac{1}{2}\int \frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial \xi} n_\mathrm{e} \overline{\gamma^{-1}} \, d^2\mathbf{r}_\perp$$

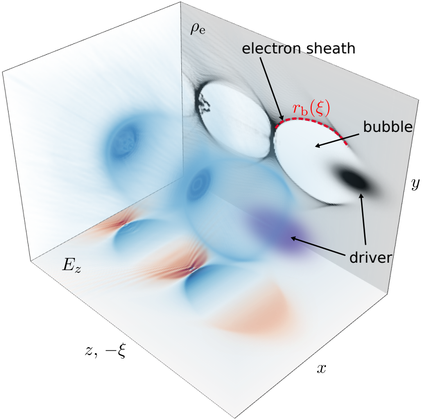
$$\Psi(\xi) = \int \tilde{W} \, d^2\mathbf{r}_\perp \quad \text{(квазиэнергия в сечении)}$$

Нет драйвера и ускоряемых сгустков: $\Psi(\xi) = \mathrm{const}$.



Lotov, *Phys. Rev. E* **69**, 046405 (2004)

Модель плазменной полости



- Осевая симметрия (r, z), компоненты E_z, E_r, B_ϕ.
- У плазменной полости есть граница $r_b(\xi)$.
- Внутри границы нет электронов плазмы.
- Электронный слой на границе бесконечно тонкий.

$$\Psi = \Psi_{EM} + \Psi_e$$

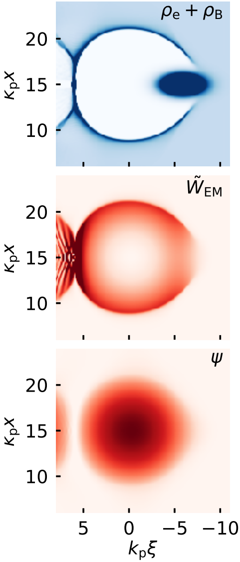
ЭМ квазиэнергия в сечении

$$\tilde{W}_{\mathrm{EM}} = \frac{(\nabla\psi_{\mathrm{w}})^2}{2} \qquad \Psi_{\mathrm{EM}}(\xi) = \pi\int_0^{r_{\mathrm{b}}(\xi)} (\nabla\psi_{\mathrm{w}})^2 r\,\mathrm{d}r$$

Граничное условие: $\psi_{\mathrm{w}}(\xi, r_{\mathrm{b}}(\xi)) = 0$.

Кильватерный потенциал внутри плазменной полости

$$\Delta_\perp \psi_{\mathrm{w}} = j_z - \rho = -1, \qquad \psi_{\mathrm{w}}(\xi, r) = \frac{r_{\mathrm{b}}^2(\xi) - r^2}{4}$$



ЭМ квазиэнергия в сечении

$$\tilde{W}_{\mathrm{EM}} = \frac{(\nabla\psi_{\mathrm{w}})^2}{2} \qquad \Psi_{\mathrm{EM}}(\xi) = \pi\int_0^{r_{\mathrm{b}}(\xi)} (\nabla\psi_{\mathrm{w}})^2 r\,\mathrm{d}r$$

Граничное условие: $\psi_{\mathrm{w}}(\xi, r_{\mathrm{b}}(\xi)) = 0$.

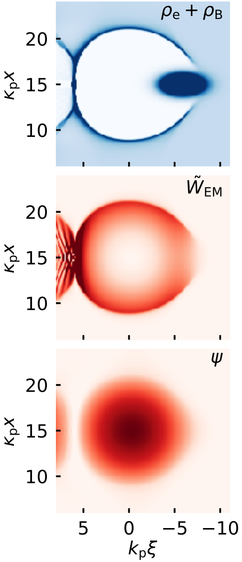
Кильватерный потенциал внутри плазменной полости

$$\Delta_\perp \psi_{\mathrm{w}} = j_z - \rho = -1, \qquad \psi_{\mathrm{w}}(\xi, r) = \frac{r_{\mathrm{b}}^2(\xi) - r^2}{4}$$

Тогда

$$(\nabla\psi_{\mathrm{w}})^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r_{\mathrm{b}}^2}{4}\left(\frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2$$

$$\Psi_{\mathrm{EM}}(\xi) = \frac{\pi r_{\mathrm{b}}^4}{16}\left[1 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right]$$



Для вычисления Ψ_e, мы полагаем

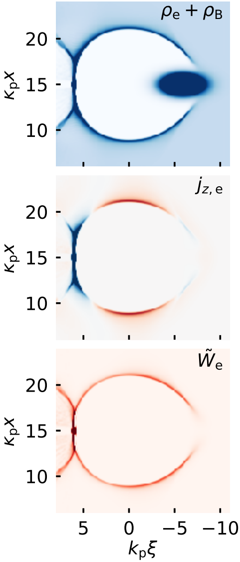
- Дельта-слой на границе $j_{z,\mathrm{e}} = j_0(\xi) r_\mathrm{b} \delta(r - r_\mathrm{b})$
- электроны движутся по касательной к границе, $v_r/(1 - v_z) = \mathrm{d}r_\mathrm{b}/\mathrm{d}\xi$
- Интеграл движения $\gamma - p_z - \psi_\mathrm{w} = 1$

Тогда можно найти

$$j_0 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{b}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2$$

$$\Psi_\mathrm{e}(\xi) = 2\pi \int_{r_\mathrm{b}-0}^{r_\mathrm{b}+0} \tilde{W}_\mathrm{e} r \, \mathrm{d}r$$

$$= -2\pi \int_{r_\mathrm{b}-0}^{r_\mathrm{b}+0} (j_z + \psi_\mathrm{w} \rho_\mathrm{e}) r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} r_\mathrm{b}^2 \left(\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{b}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2$$



Уравнение для границы плазменной полости

В итоге, полная квазиэнергия

$$\Psi = \frac{\pi r_b^2}{16}\left[r_b^2 + (2r_b^2 + 8)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 \right], \qquad \frac{d\Psi}{d\xi} = -\pi r_b \frac{dr_b}{d\xi}\int_0^{r_b} \rho_B r\, dr$$

Уравнение для границы плазменной полости

В итоге, полная квазиэнергия

$$\Psi = \frac{\pi r_b^2}{16}\left[r_b^2 + (2r_b^2 + 8)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2\right], \qquad \frac{d\Psi}{d\xi} = -\pi r_b \frac{dr_b}{d\xi}\int_0^{r_b} \rho_B r\, dr$$

И мы получаем уравнение

$$\left(\frac{r_b^3}{4} + r_b\right)\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + \left(\frac{r_b^2}{2} + 1\right)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + \frac{r_b^2}{2} = \lambda(\xi, r_b), \quad \lambda(\xi, r_b) = \int_0^{r_b} \rho_B r\, dr$$

красные — ЭМ энергия, синие — энергия электронов плазмы.

Уравнение для плазменной полости = закон сохранения энергии

Сравнение уравнений

$$A(r_b)\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + B(r_b)\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + C(r_b) = \lambda(\xi, r_b), \quad \lambda(\xi, r_b) = \int_0^{r_b} \rho_B r\, dr$$

ЗСЭ

$$A = \frac{r_b^3}{4} + r_b \qquad B = \frac{r_b^2}{2} + 1$$

$$C = \frac{r_b^2}{4} \qquad E_z = \frac{r_b}{2}\frac{dr_b}{d\xi}$$

Модель Лю

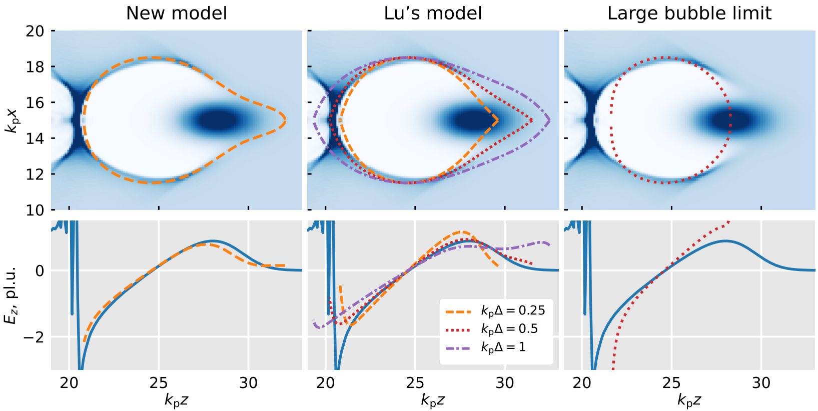
$$A = \frac{r_b^3}{4} + r_b + \frac{3}{4}r_b^2\Delta, \qquad B = \frac{r_b^2}{2} + \frac{r_b\Delta}{2},$$

$$C = \frac{r_b^2}{4}\left[1 + \left(1 + \frac{r_b\Delta}{2}\right)^{-2}\right], \qquad E_z = \frac{r_b + \Delta}{2}\frac{dr_b}{d\xi}.$$

Не соответствует ЗСЭ

Для плазменной полости большого размера $r_b \gg 1$, уравнения одинаковые:

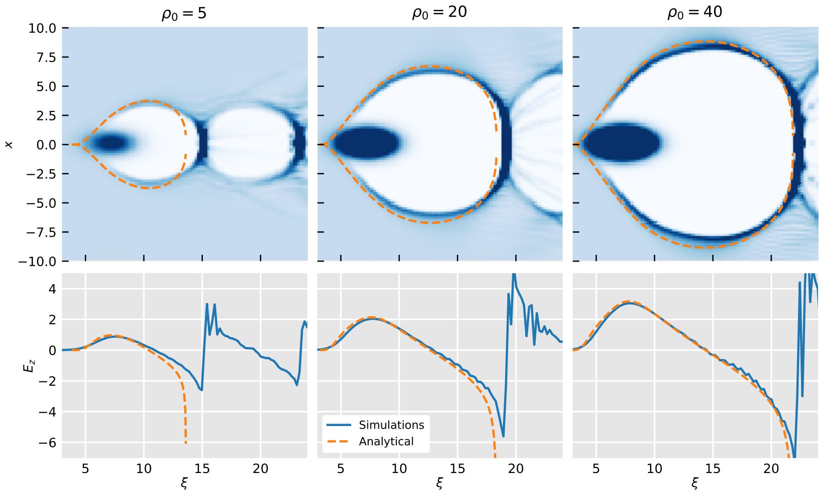
$$r_b\frac{d^2 r_b}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dr_b}{d\xi}\right)^2 + 1 = \frac{4\lambda}{r_b^2}$$



Решение построено из точки r_b = max r_b.

Возбуждение плазменной полости

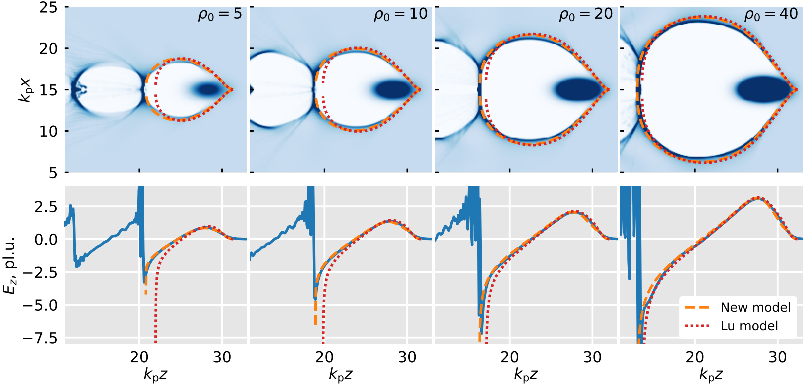
Самосогласованная модель возбуждения плазменной полости электронным сгустком на основе модели Лю в пределе $r_\mathrm{b} \gg 1$.



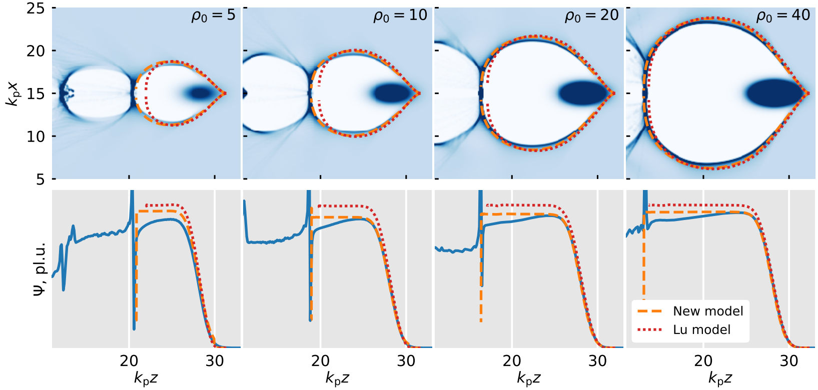
Golovanov et al. *PPCF* **63**, 085004 (2021).

Возбуждение плазменной полости

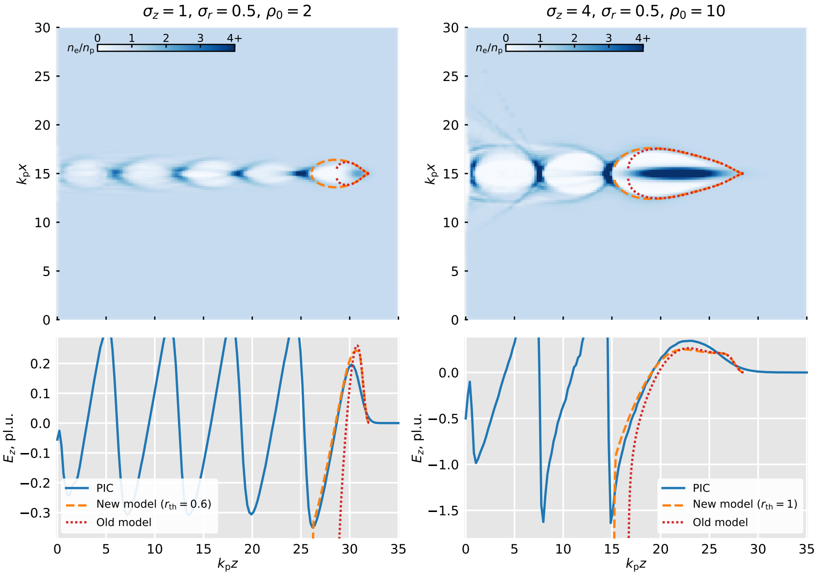
Обобщение на новое уравнение: до $r_b < 1$ старое решение, при $r_b > 1$ новое.

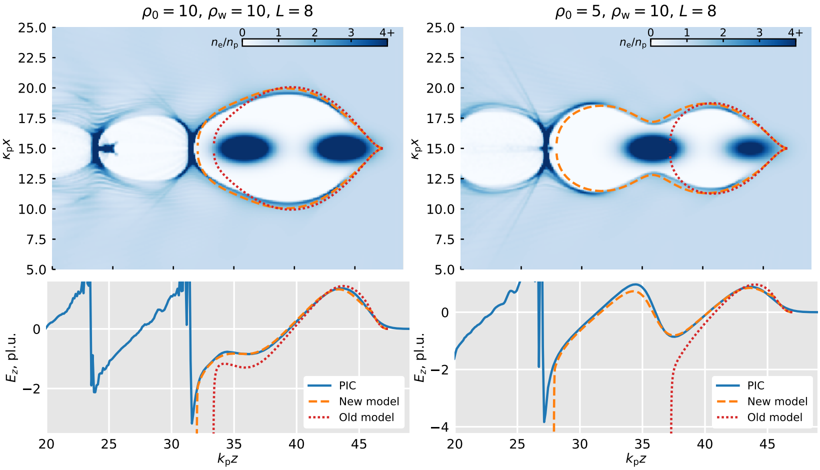


Обобщение на новое уравнение: до $r_b < 1$ старое решение, при $r_b > 1$ новое.



Другие примеры




$\rho_0 = 10,\ \rho_w = 10,\ L = 8$
$\rho_0 = 5,\ \rho_w = 10,\ L = 8$
n_e/n_p
0 1 2 3 4+
$\kappa_p x$
E_z, pl.u.
$k_p z$
PIC
New model
Old model

В качестве альтернативы можно использовать аналитическое квазилинейное решение на фронте сгустка.

На фронте сгустка известно аналитическое квазилинейное решение.

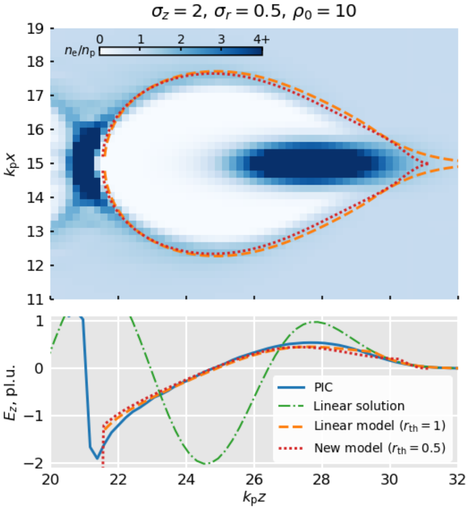
В баббл-режиме:

$$\psi_w(\xi, 0) = \frac{r_b^2}{4}, \qquad E_z = \frac{r_b}{2}\frac{dr_b}{d\xi}$$

Выражая r_b и r_b', получаем начальные условия

$$r_b = 2\sqrt{\psi_w(\xi, 0)}$$

$$r_b' = \frac{E_z(\xi, 0)}{\sqrt{\psi_w(\xi, 0)}}$$



Сшивка с квазилинейным решением

В качестве альтернативы можно использовать аналитическое квазилинейное решение на фронте сгустка.

На фронте сгустка известно аналитическое квазилинейное решение.

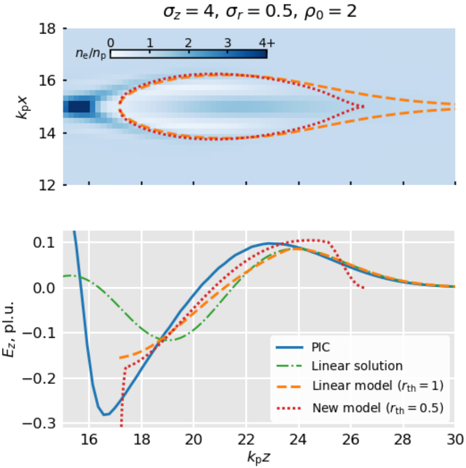
В баббл-режиме:

$$\psi_\mathrm{w}(\xi,0) = \frac{r_\mathrm{b}^2}{4}, \quad E_z = \frac{r_\mathrm{b}}{2}\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{b}}{\mathrm{d}\xi}$$

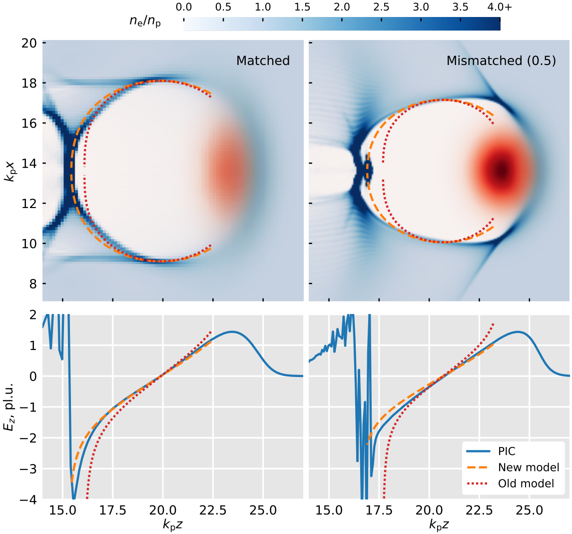
Выражая r_b и r_b', получаем начальные условия

$$r_\mathrm{b} = 2\sqrt{\psi_\mathrm{w}(\xi,0)}$$

$$r_\mathrm{b}' = \frac{E_z(\xi,0)}{\sqrt{\psi_\mathrm{w}(\xi,0)}}$$



Лазерный драйвер



Спасибо за внимание!

Статья: A. Golovanov et al. *PRL* 130, 105001 (2023)