

Разработка алгоритма кинематической реконструкции распадов частиц, основанного на фильтре Калмана

Яковлев Даниил Дмитриевич^{1, 2}

Науч. рук.: к.ф.-м.н. Воробьев Виталий Сергеевич^{1, 2}

¹Новосибирский Государственный Университет

²ИЯФ СО РАН

15 июня 2020 г.

- 1 Постановка задачи
- 2 Алгоритмы кинематической реконструкции
- 3 Сравнение работы алгоритмов
- 4 Заключение: выводы и статус

- 1 Постановка задачи
- 2 Алгоритмы кинематической реконструкции
- 3 Сравнение работы алгоритмов
- 4 Заключение: выводы и статус

Постановка задачи

Супер С-Тау фабрика

Супер С-Тау фабрика – проект электрон-позитронного коллайдера в Новосибирске, нацеленный на изучение очарованных адронов и тау-лептонов.

Особенности эксперимента:

- Энергия пучка: от 1 до 3 ГэВ
- Высокая светимость
 $\mathcal{L} = 10^{35} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$

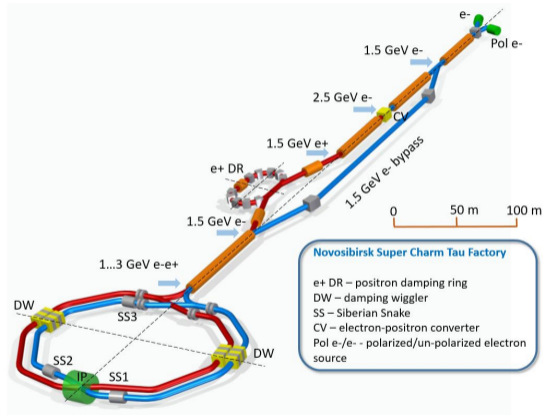


Рис. 1: Ускорительный комплекс

Постановка задачи

Постановка задачи реконструкции на примере распада $D^0 \rightarrow \phi(\rightarrow K^+K^-)K_S^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)$

Детектор регистрирует только **конечные частицы**:

- треки π^+ , π^- , K^+ , K^-

Также необходимо удовлетворить **кинематическим ограничениям**:

- Ограничение на инвариантную массу D^0, ϕ, K_S^0
- Пересечение треков в точке распада

Задача:

Восстановить координаты и импульсы частиц всего дерева распада.

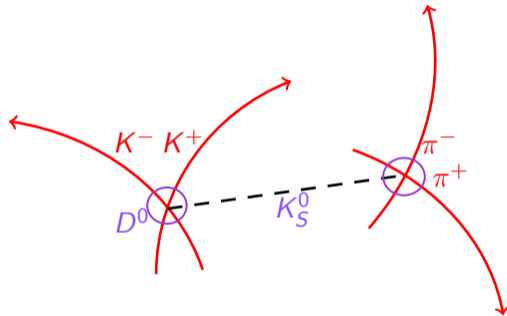


Рис. 2: Пример распада:
 $D^0 \rightarrow \phi(\rightarrow K^+K^-)K_S^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)$

- 1 Постановка задачи
- 2 Алгоритмы кинематической реконструкции**
- 3 Сравнение работы алгоритмов
- 4 Заключение: выводы и статус

Алгоритмы кинематической реконструкции

Обобщенный метод наименьших квадратов

Вектор состояния дерева распада из n частиц: $x = (p_1, E_1, r_1, \dots, p_n, E_n, r_n)$

- **Измерительные ограничения**

$$\chi_i^2 = r_i^T(x) V_i^{-1} r_i(x) \quad (1)$$

где $r_i(x) = m_i - h_i(x)$ — отклонение текущей оценки $h_i(x)$ от измерений m_i , V_i — матрица ошибок измерения.

- **Кинематические ограничения**

$$\chi_i^2 = 2\lambda_i^T g_i(x) \quad (2)$$

где $g_i(x)$ ограничивающая функция, λ_i множители Лагранжа.

$$\chi^2 = \sum \chi_i^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

Алгоритмы кинематической реконструкции

Реконструкция распада фильтром Калмана

Предложен для факторизации задачи реконструкции деревьев распада R. Frühwirth¹. Основная идея, что ограничения применяются **последовательно**, а не одновременно как в МНК. Применение k -ого измерительного ограничения:

$$\chi_k^2 = (x - x_{k-1})^T C_{k-1}^{-1} (x - x_{k-1}) + (h_k(x) - m_k)^T V_k^{-1} (h_k(x) - m_k) \quad (4)$$

где C_{k-1} — матрица ковариации вектора состояния x на предыдущей итерации $k - 1$. Находим минимум данного функционала из условия $\partial\chi_k^2/\partial x = 0$:

МНК

Одновременно применяются все ограничения.

Фильтр Калмана

Последовательное применение все ограничений. Повышение скорости реконструкции по сравнению с МНК

¹R. Frühwirth, Application of Kalman filtering to track and vertex fitting, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., 1987

Алгоритмы кинематической реконструкции

Оценка вычислительной сложности алгоритмов

Пусть N — число параметров в векторе состояния, $M_{\text{meas}} = \sum \dim(m_i)$ — число измерительных ограничений (покомпонентно), $M_{\text{kine}} = \sum \dim(g_i(x))$ — число кинематических ограничений (покомпонентно):

МНК

Вычислительная сложность одной итерации $O((N + M_{\text{kine}})^3)$.

- Т.к. $M_{\text{kine}} \sim N$ и $M_{\text{meas}} \sim N$, то обе асимптотики имеют одинаковую зависимость $O(N^3)$
- При последовательном применении кинематических ограничений могут не сохраняться

Фильтр Калмана

Вычислительная сложность одной итерации $O(N^2(M_{\text{kine}} + M_{\text{meas}}))$.

- 1 Постановка задачи
- 2 Алгоритмы кинематической реконструкции
- 3 Сравнение работы алгоритмов**
- 4 Заключение: выводы и статус

Сравнение работы алгоритмов

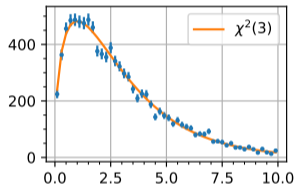
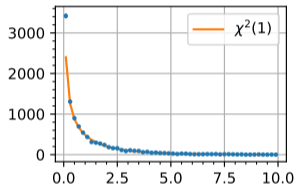
Проанализированные события и их χ^2 после реконструкции

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

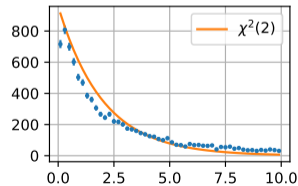
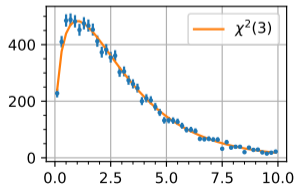
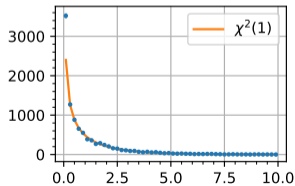
$$D^0 \rightarrow \phi(\rightarrow K^+ K^-) K_S^0(\rightarrow \pi^+ \pi^-)$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \text{ (треки)}$$

МНК



Фильтр
Калмана



Сравнение работы алгоритмов

Генераторные события $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$

События генерируются с помощью Toy Monte-Carlo генератора:

- Генерируем импульс K_S^0 , в его системе изотропно разыгрываем импульсы пионов, возвращаем их в лабораторную систему с помощью преобразований Лоренца.
- Накладываем ошибку измерений на импульсы пионов в соответствии с ковариационной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} \text{ MeV}^2$$

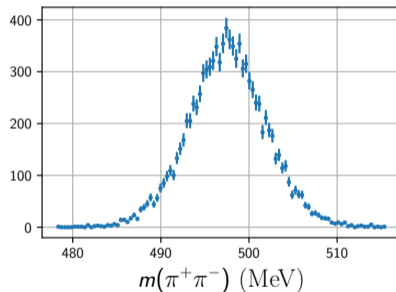


Рис. 3: Спектр массы $\pi^+\pi^-$ сгенерированных методом Монте Карло

Сравнение работы алгоритмов

Реконструкция энергии K_S^0 в распаде $D^0 \rightarrow \phi(\rightarrow K^+K^-)K_S^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)$

Реконструкция энергии каона $E - E_{m-c}$:

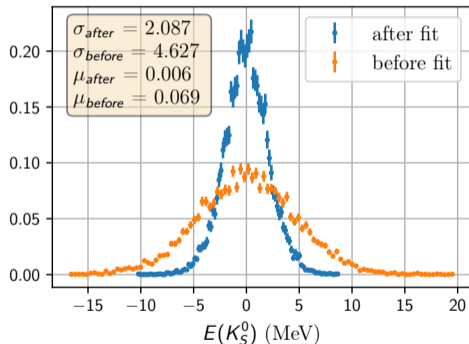


Рис. 4: Реконструкция МНК

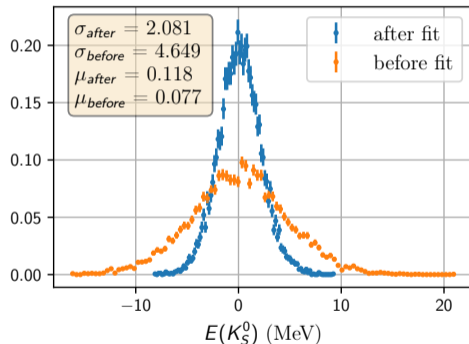


Рис. 5: Реконструкция фильтром Калмана

Сравнение работы алгоритмов

Соблюдение кинематических ограничений

Проверим соблюдение кинематического ограничения на сохранение энергии:

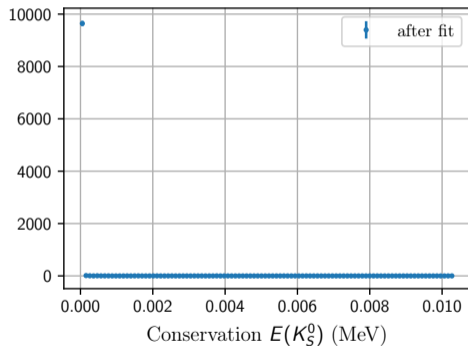


Рис. 6: Реконструкция МНК

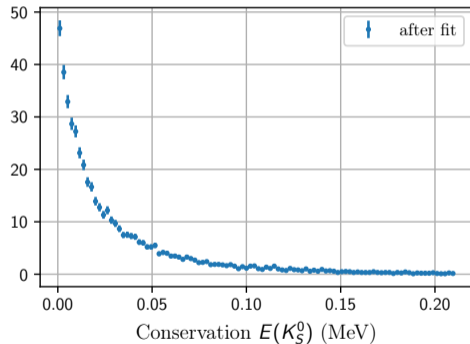


Рис. 7: Реконструкция фильтром Калмана

Сравнение работы алгоритмов

Pull распределения

Построим pull распределения для энергии каона K_S^0 : $(E_{fit} - E_{m-c})/\sigma_{fit}$. С их помощью можно убедиться в корректном вычислении матрицы ковариации для вектора состояния:

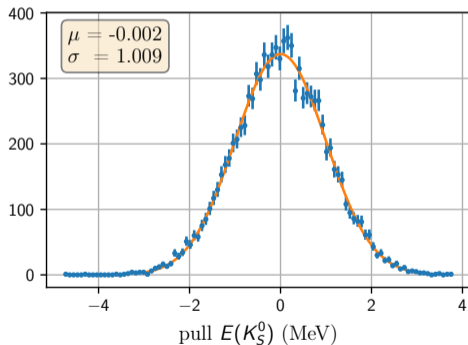


Рис. 8: Реконструкция МНК

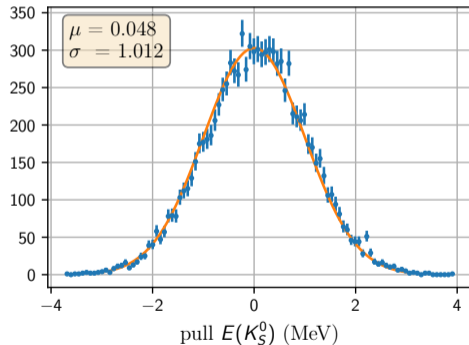


Рис. 9: Реконструкция фильтром Калмана

Сравнение работы алгоритмов

Тесты производительности

На обеих реализациях (МНК и фильтр Калмана) были выполнены оптимизации с помощью профайлера cProfile и сделаны тесты производительности:

Модель	Распад	МНК, μs	Калман, μs
Только импульсы	$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	0.177	2.6
	$D^0 \rightarrow \phi(\rightarrow K^+ K^-) K_S^0(\rightarrow \pi^+ \pi^-)$	2.1	59
Импульсы и вершины	$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	—	4.1

- 1 Постановка задачи
- 2 Алгоритмы кинематической реконструкции
- 3 Сравнение работы алгоритмов
- 4 Заключение: выводы и статус

Статус:

- Реализованы прототипы обоих алгоритмов на языке Python
- Проанализирована их работа на конкретных распадах частиц
- На основании этого выполнено сравнение алгоритмов

Выводы:

- Реконструкция с фильтром Калмана оказалась медленее МНК на малых распадах
- Реконструкция с фильтром Калмана не полностью удовлетворяет кинематических ограничениям

Спасибо за внимание!

Backup slides

Для минимизации $\chi^2 = \sum_i \chi_i^2$ нам потребуется найти точку, в которой $\partial\chi^2/\partial x = 0$. Для этого воспользуемся методом Ньютона-Рафсона

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \frac{\partial \chi^2}{\partial x} \quad (5)$$

Для нелинейных ограничений будем применять данное выражение пока не достигнем критерия сходимости. Через перенос ошибок получаем ковариационную матрицу для вектора состояния x :

$$C(x) = 2 \left(\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

Локальный алгоритм: Вычисление частиц по отдельности снизу вверх (leaf-by-leaf).

Локальный алгоритм

- Ниже вычислительные требования
- Менее точно удовлетворяет кинематическим ограничениям
- Нет обратной связи для нижестоящих частиц

Глобальный алгоритм: Вычисление всего дерева распадов целиком (один большой вектор состояния).

Глобальный алгоритм

- Требователен к вычислительным ресурсам
- Точнее удовлетворяет кинематическим ограничениям
- Вышестоящие частицы вносят вклад в реконструкцию нижестоящих

Модель системы подразумевает, что истинное состояние в момент k получается из истинного состояния в момент $k - 1$ в соответствии с уравнением:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k \quad (7)$$

где F_k — матрица эволюции системы, B_k и u_k — матрица и вектор управления, $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ — случайный характер эволюции модели.

В момент k производится измерение m_k истинного вектора состояния x_k :

$$m_k = H_k x_k + v_k \quad (8)$$

где H_k — матрица измерений, $v_k \sim \mathcal{N}(0, V_k)$ — шум измерений.

Классический фильтр Калмана:

$$\begin{aligned}x_k &= F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k \\m_k &= H_k x_k + v_k\end{aligned}\tag{9}$$

Расширенный фильтр Калмана:

$$\begin{aligned}x_k &= f(x_{k-1}, u_k) + w_k \\m_k &= h(x_k) + v_k\end{aligned}\tag{10}$$

Расширенный фильтр Калмана

Шаг алгоритма

На вход фильтра поступает вектор состояния x_0 и матрица ковариации C_0 :

Этап экстраполяции

$$\hat{x}_k = f(x_{k-1}, u_k)$$

$$\hat{C}_k = F_k C_k F_k^T + Q_k$$

Этап коррекции

$$r_k = m_k - h(\hat{x}_k)$$

$$R_k = V_k + H_k \hat{C}_{k-1} H_k^T$$

$$K_k = \hat{C}_{k-1} H_k^T R_k^{-1}$$

$$x_k = \hat{x}_{k-1} + K_k r_k$$

$$C_k = (1 - K_k H_k) \hat{C}_{k-1}$$

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{k-1}, u_k} \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k}$$

Расширенный фильтр Калмана

Шаг алгоритма

На вход фильтра поступает вектор состояния x_0 и матрица ковариации C_0 :

Этап экстраполяции

$$\hat{x}_k = f(x_{k-1}, u_k)$$

$$\hat{C}_k = F_k C_k F_k^T + Q_k$$

Этап экстраполяции

$$\hat{x}_k = x_{k-1}$$

$$\hat{C}_k = C_k$$

Этап коррекции

$$r_k = m_k - h(\hat{x}_k)$$

$$R_k = V_k + H_k \hat{C}_{k-1} H_k^T$$

$$K_k = \hat{C}_{k-1} H_k^T R_k^{-1}$$

$$x_k = \hat{x}_{k-1} + K_k r_k$$

$$C_k = (1 - K_k H_k) \hat{C}_{k-1}$$

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{k-1}, u_k} \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k}$$

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Измерительные ограничения

Рассмотрим измерительное ограничение k . Предположим что χ^2 уже содержит в себе вклады всех ограничений $\{0, \dots, k\}$ и уже сведен к минимум. Этот минимум является вектором предсказаний параметров модели x_{k-1} с соответствующей матрицей ковариации C_{k-1} . Чтобы вычислить как x изменяется при добавлении ограничения k , мы определим соответствующий вклад χ_k^2 в целевую функцию:

$$\chi_k^2 = (x - x_{k-1})^T C_{k-1}^{-1} (x - x_{k-1}) + (h_k(x) - m_k)^T V_k^{-1} (h_k(x) - m_k) \quad (11)$$

Находим минимум данного функционала из условия $\partial\chi^2/\partial x = 0$:

$$C_{k-1}^{-1} (x - x_{k-1}) + H_k^T V_k^{-1} (h_k(x) - m_k) = 0 \quad (12)$$

где $H_k \equiv \partial h / \partial x|_{x_{k-1}}$.

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Измерительные ограничения

Перепишем уравнение как:

$$(C_{k-1}^{-1} + H_k^T V_k^{-1} H_k)(x - x_{k-1}) = H_k^T V_k^{-1} r_k^{k-1} \quad (13)$$

Разложим $h_k(x) = h_k(x_{k-1}) + H_k(x - x_{k-1})$

Тогда решая (13) относительно x получим

$$x_k = x_{k-1} + K_k(r_k^{k-1}) \quad (14)$$

где матрица усиления K_k определена как

$$K_k = C_{k-1} H_k^T (R_k^{k-1})^{-1} \quad (15)$$

где $R_k^{k-1} = V_k + H_k C_{k-1} H_k^T$ — неопределенность отклонения оценки.

Таким образом, измерительное ограничение m_k дает вклад в χ^2 :

$$\chi_k^2 = (r_k^{k-1})^T (R_k^{k-1})^{-1} r_k^{k-1} \quad (16)$$

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Измерительные ограничения

Обновленная матрица ковариации, полученная для фильтра Калмана переносом ошибки, выглядит следующим образом:

$$C_k = (1 - K_k H_k) C_{k-1} (1 - K_k H_k)^T + K_k V_k K_k^T \quad (17)$$

При оптимальной по Калману матрице коэффициентов усиления получим формулу вычислительно проще, но менее стабильную для машинных ошибок вычисления:

$$C_k = (1 - K_k H_k) C_{k-1} \quad (18)$$

Более стабильная версия:

$$C_k = C_{k-1} - K_k (2H_k C_{k-1} - R_k^{k-1} K_k^T) \quad (19)$$

Если измерительная модель нелинейна по x , то x_k может быть получено в итеративной процедуре. Разложим $h(x)$ вокруг точки $x^{(i)}$ (начиная с точки x_{k-1})

$$h_k(x) = h_k(x^{(i)}) + H_k^{(i)}(x - x^{(i)}) \quad (20)$$

оценка для x_k становится

$$x_k^{(i+1)} = x_{k-1} + K_k^{(i)} r_k^{k-1(i)} \quad (21)$$

где $r_k^{k-1(i)} = m_k - h_k(x^{(i)}) - H_k^{(i)}(x_{k-1} - x^{(i)})$

Выбирая $x_k^{(i+1)}$ как точку, вокруг которой линеаризуем, получим улучшенную оценку x_k путем итерации, с учетом определенного критерия сходимости, например, стабильный χ^2 . Трудоемкий расчет ковариационной матрицы может быть выполнен после достижения сходимости.

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Кинематические ограничения

Определим вклад в целевую функцию от ограничения $g_k(x) = 0$

$$\chi_k^2 = (x - x_{k-1})^T C_{k-1}^{-1} (x - x_{k-1}) + 2\lambda_k^T g_k(x) \quad (22)$$

Линеаризуем уравнение ограничения вокруг x_{k-1}

$$g_k(x) = g_k(x_{k-1}) + G_k(x - x_{k-1}) + \dots \quad (23)$$

где $G_k = \partial g_k(x) / \partial x|_{x_{k-1}}$, мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} 0 &= C_{k-1}^{-1} (x - x_{k-1}) + G_k^T \lambda_k \\ 0 &= g_k(x_{k-1}) + G_k (x - x_{k-1}) \end{aligned} \quad (24)$$

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Кинематические ограничения

Обновленный вектор состояния:

$$x_k = x_{k-1} - K_k g_k(x_{k-1}) \quad (25)$$

$$K_k = C_{k-1} G_k^T (G_k C_{k-1} G_k^T)^{-1} \quad (26)$$

Также вычислим вклад в χ^2 :

$$\chi_k^2 = g_k(x_{k-1})^T (G_k C_{k-1} G_k^T)^{-1} g_k(x_{k-1}) \quad (27)$$

Используя перенос ошибок мы получим обновленную матрицу ковариации:

$$C_k = (1 - K_k G_k) C_{k-1} (1 - K_k G_k)^T \quad (28)$$

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Кинематические и измерительные ограничения одно и то же?

Сравнение выражений для точных ограничений с выражениями для измерительных ограничений показывает идентичность двух процедур:

$$\begin{aligned} h_k(x_{k-1}) - m_k &\longrightarrow g_k(x_{k-1}) \\ V_k + H_k C_{k-1} H_k^T &\longrightarrow G_k C_{k-1} G_k^T \end{aligned} \quad (29)$$

Этот результат подтверждается интуитивными соображениями, что точное ограничение это тоже самое что и измерительное ограничение с бесконечной точностью.

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Порядок применения ограничений

Предлагаемый порядок ограничений:

- Внешние ограничения (реконструкция треков, фотонов, точка взаимодействия пучков и т.д.)
- Законы сохранения 4х импульса, применяющиеся последовательно от сдетектированных частиц или же вершин дерева распада до его корня
- Ограничение на инвариантную массу, и другие нелинейные ограничения

Итеративная реконструкция с фильтром Калмана

Инициализация и сходимость

Инициализация вектора состояния x_0 и матрицы ковариации C_0 .

- Координаты вершин: средняя точка взаимодействия или РОСА
- Импульс фотонов инициализируется, используя начальную точку столкновения пучков как точку возникновения
- Импульсы частиц внутри распадов инициализируются сложением импульсов дочерних частиц

Ковариационная матрица должна быть инициализирована с достаточно большими неопределенностями, чтобы исходные параметры имели незначительный вес в конечном результате подгонки, но достаточно малыми, чтобы ошибки измерения измерения V_k в уравнении не являлись ничтожно малыми по отношению к $H_k C_k H_k^T$. Выбрана диагональную матрицу с диагональными элементами, которые примерно в 1000 раз больше, чем квадрат типичного разрешения для соответствующего параметра.

Сравнение работы глобальных алгоритмов

Анализ χ^2 после реконструкции

Определим число степеней свободы для распада $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ с ограничением на массу Каона (приравниваем к PDG).

- Число параметров в векторе состояния: 10
- Кинематических ограничений: 5 (законы сохранения и ограничение на инвариантную массу)
- Измерительных ограничений: 6 (импульсы пионов)

Число степеней свободы: $5 + 6 - 10 = 1$.

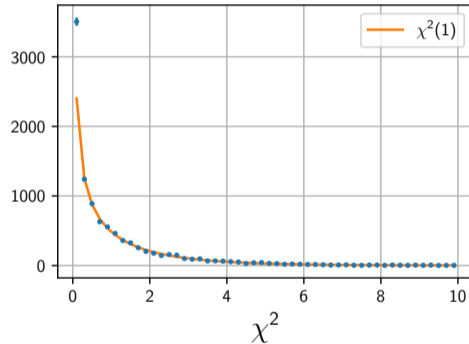


Рис. 10: Распределение χ^2