Содержание

1. Введение

В настоящее время в Институте Ядерной Физики СО РАН ведется проработка проекта Супер Чарм Тау Фабрики (СЧТФ) — электрон–позитронного коллайдера, осуществляющего сканирование диапозона энергий от 2 до 7 ГэВ в системе центра масс (с.ц.м.) со светимостью до 10^{35} см$^{-2}$с$^{-1}$ и с возможностью продольной поляризации электронов в месте встречи [1]. Схема установки изображена на Рис. 1.

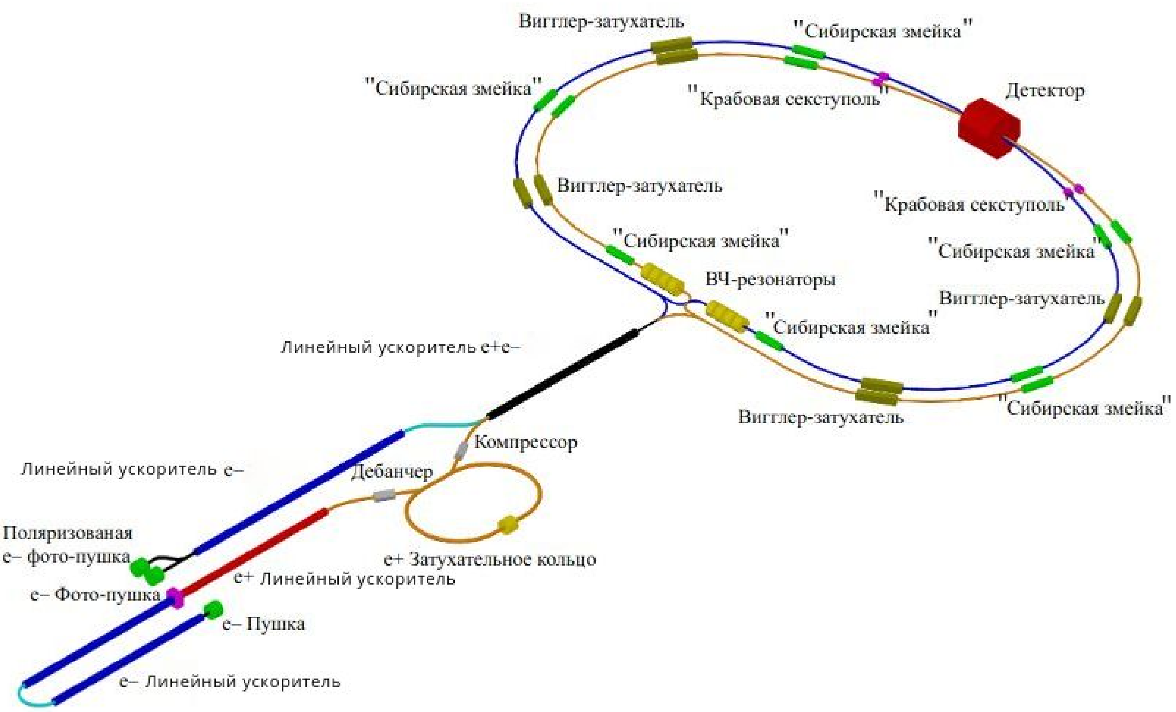


Рис. 1: Схема комплекса Супер Чарм–Тау Фабрики.

Основным направлением исследований на СЧТФ являются эксперименты по изучению процессов рождения и распадов очарованных мезонов и тау–лептонов, а также поиск явлений, не описываемых Стандартной Моделью. Для этого планируется набрать интеграл светимости, на два порядка превышающий статистику, набранную детектором BES III (Пекин).

Для регистрации частиц, рождаемых в столкновениях электрон–позитронных пучков СЧТФ, требуется создание универсального прецизионного магнитного детектора. Для достижения целей эксперимента к детектору выдвигается ряд требований, среди которых [1]: хорошее координатное, импульсное и энергетическое разрешения для заряженных частиц и фотонов соответственно; надежная идентификация типа частиц, т. е. разделение каонов, мюонов, пионов и электронов.

Конструкция детектора СЧТФ разрабатывается на основе собственного опыта создания детекторов в ИЯФ СО РАН, а также использует опыт международного сотрудничества с коллаборациями BaBar и Belle. Принципиальная схема детектора изображена на Рис. 2

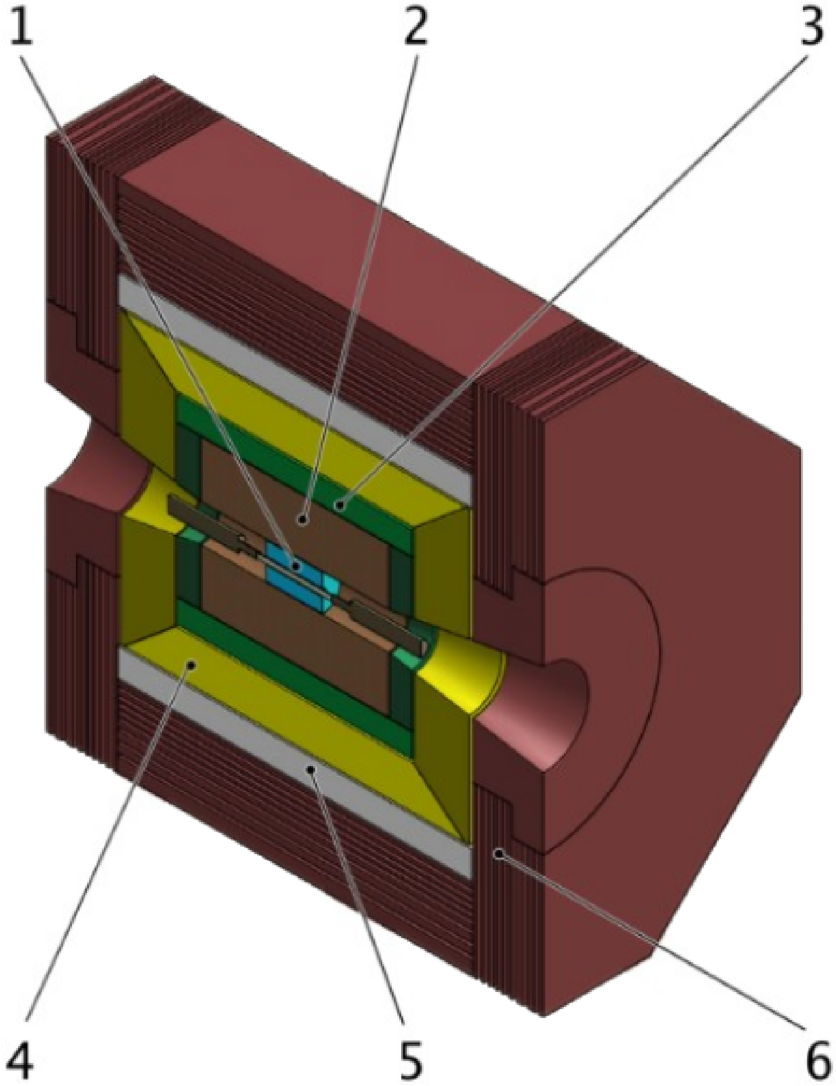


Рис. 2: Принципиальная схема детектора СЧТФ: 1 — вакуумная камера; 2 — дрейфовая камера; 3 — система идентификации ФАРИЧ; 4 — электромагнитный калориметр; 5 — сверхпроводящая катушка; 6 — ярмо магнита и мюонная система.

Детектор состоит из следующих подсистем:

- внутренний трекер;
- дрейфовая камера (ДК) [2], [3];

- система идентификации на основе детектора черенковских колец с фокусирующим аэрогелевым радиатором (ФАРИЧ) [4];
- электромагнитный калориметр на основе кристаллов чистого CsI [5], [6];
- мюонная система.

Дрейфовая камера предназначена для измерения координат и импульсов заряженных частиц, а также идентификации их типа по характеру энерговыделения в газовом объеме. В качестве основного варианта для детектора СЧТФ рассматривается ДК со стереослоями, заполненная смесью $\mathrm{HeiC_4H_{10}}$ (гелий–изобутан) в процентном соотношении 90:10 [2], при этом выбор гелия в качестве рабочего газа обусловлен необходимостью минимизации вклада многократного рассеяния в разрешение детектора.

Поскольку ДК является сложной и дорогостоящей системой, ее изготовлению должно предшествовать тщательное моделирование, позволяющее оптимизировать ее характеристики. **Целью** данной работы является создание программ моделирования ДК детектора СЧТФ, она достигается решением следующих **задач**:

- Разработка алгоритма генерации геометрии проволочек ДК;
- Моделирование процесса рождения ионизационных кластеров в объеме ДК и сигналов, вызываемых ими в сигнальных проволочках;
- Моделирование оцифровки сигналов с проволочек;
- Реализация алгоритмов реконструкции хитов и поиска треков;
- Реализация процедуры аппроксимации треков. Оценка координатного и импульсного разрешений камеры.

2. Генератор геометрии проволочек дрейфовой камеры

ДК СЧТФ представляет собой цилиндрический объем, заполненный газовой смесью $\mathrm{HeiC_4H_{10}}$ 90:10 с сигнальными и полевыми проволочками.

Базовый вариант ДК СЧТФ представляет собой так называемую full–stereo камеру с проволочками, сгруппированными в аксиально–симметричные слои. Угол наклона проволочек относительно оси z зависит от слоя и называется стереоуглом ϵ (см. Рис. 3), проволочки одного слоя лежат на поверхности однополостного гиперболоида. Знак стереоугла противоположен в чередующихся слоях (см. Рис. 4), что позволяет определять z–координату пролета частицы по месту пересечения одновременно сработавших проволочек в соседних слоях. Отношение числа полевых и сигнальных проволочек составляет приблизительно 5:1 (см. Рис. 5), дрейфовые ячейки в соседних слоях сдвинуты друг относительно друга на четверть своей ширины для подавления неопределенности "лево–право", т.е. неопределенности стороны пролета частицы относительно сигнальной проволочки. Слои ячеек сгруппированы в 8 суперслоев по 8 слоев в каждом, число ячеек одинаково в каждом слое в пределах данного суперслоя, см. Рис. 6. На Рис. 7–8 показана структура ячеек ДК с указанием знаков стереоуглов проволочек.

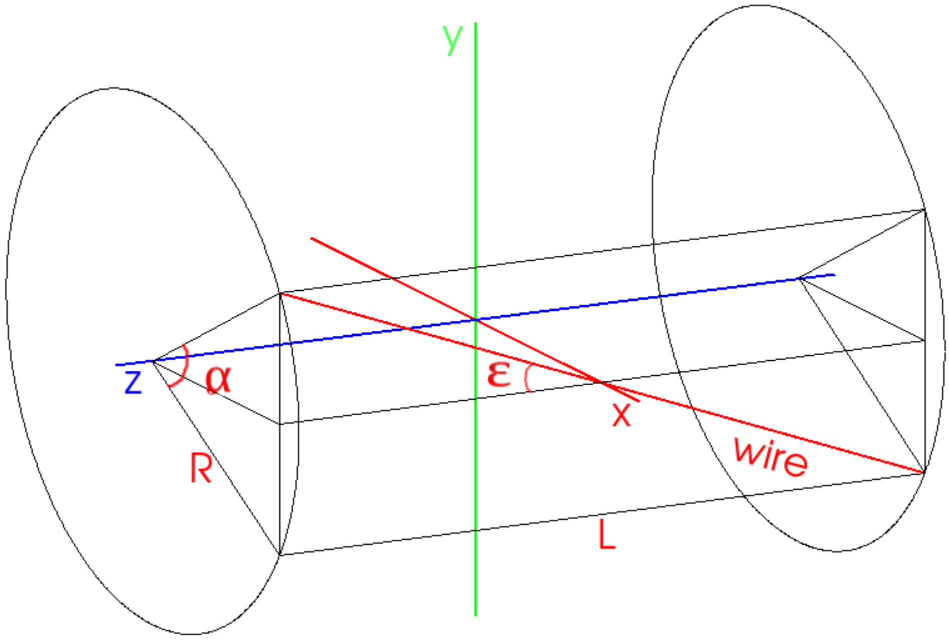


Рис. 3: Проволочка ДК со стереоуглом ϵ. L — длина камеры, α — угол между концами проволочки в xy–плоскости, R — расстояние от конца проволочки на торце ДК до оси z.

Основные параметры геометрии ДК, используемые в дальнейшем моделировании, приведены в Таблице 1. Количество вещества ДК, пересекаемого частицей, летящей по прямой под полярным углом $\pi/2$ составляет

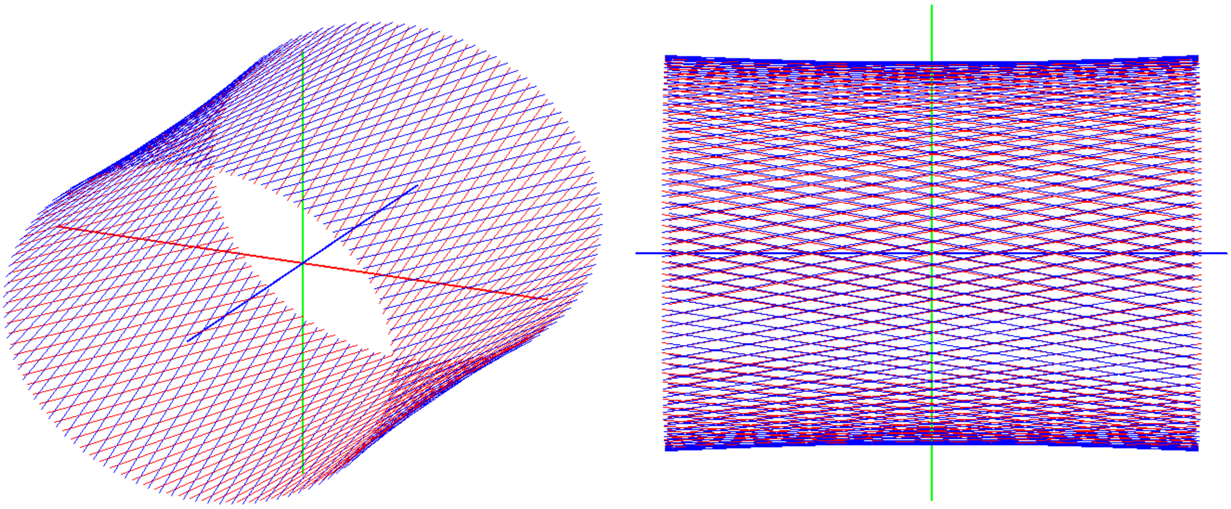


Рис. 4: Два последовательных слоя сигнальных проволочек ДК в 3d (слева) и y–z–проекции (справа). Изображена каждая пятая проволочка в слое.

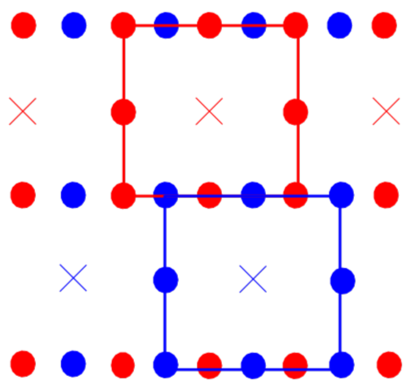


Рис. 5: Структура ячеек в соседних слоях ДК. Сигнальные проволочки показаны крестиками, полевые — кружками. Цвета соответствуют различным знакам стереоугла.

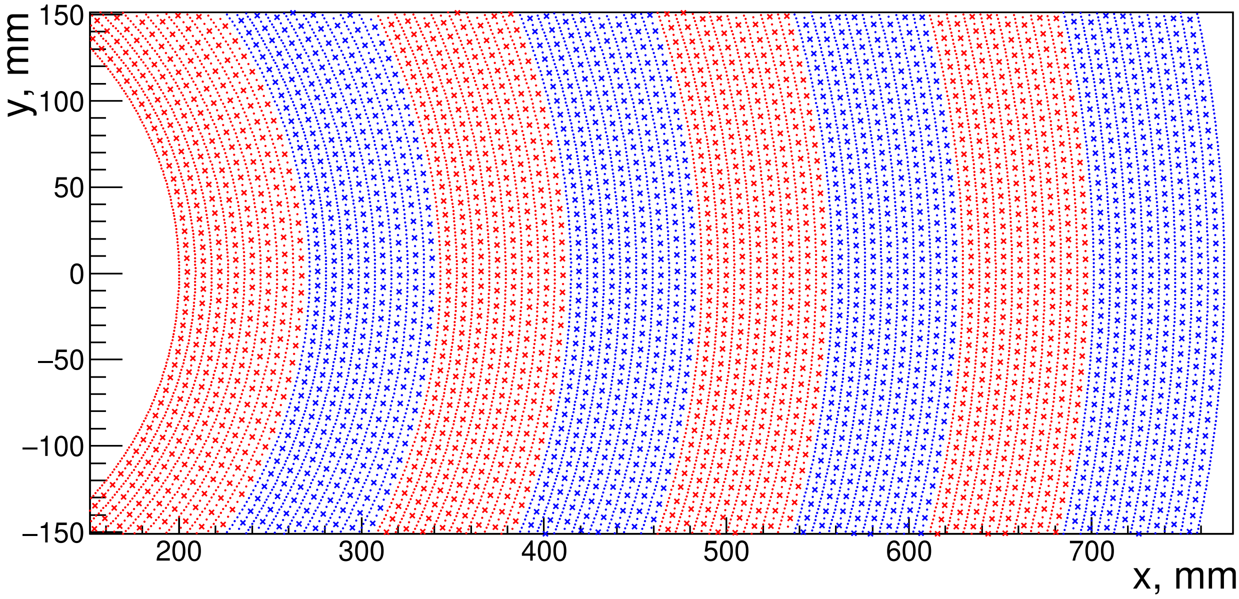


Рис. 6: Сигнальные (крестики) и полевые (точки) проволочки ДК в сечении $z = 0$. Цветом выделены четные и нечетные суперслои.

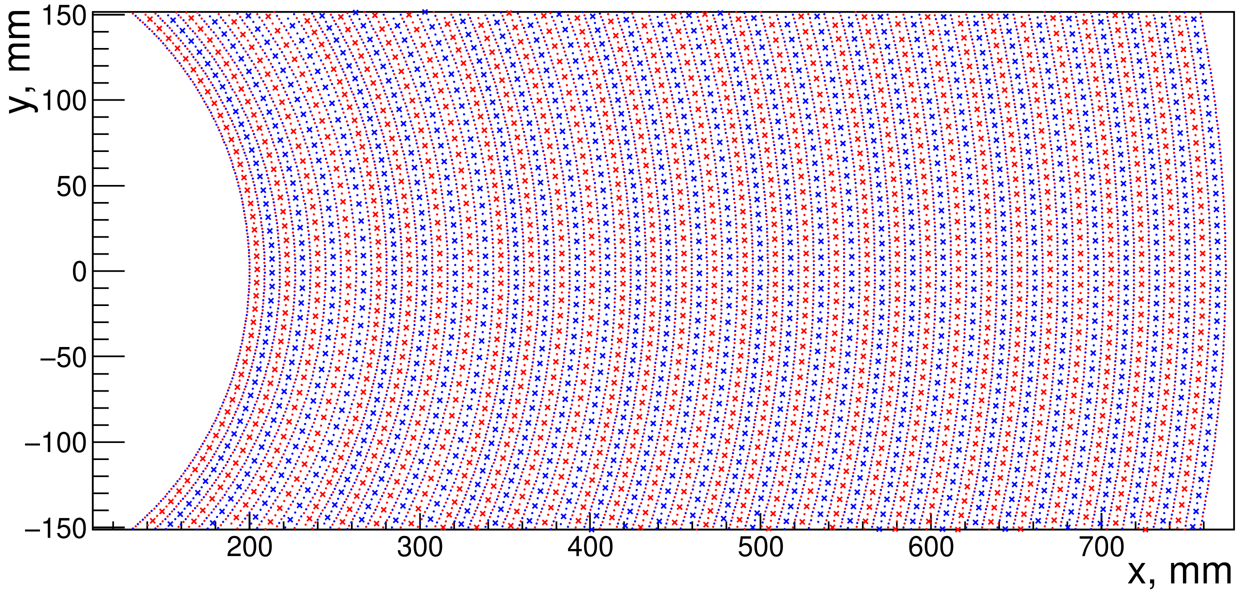


Рис. 7: Сигнальные (крестики) и полевые (точки) проволочки ДК в сечении $z = 0$. Цвета соответствуют различным знакам стереоугла.

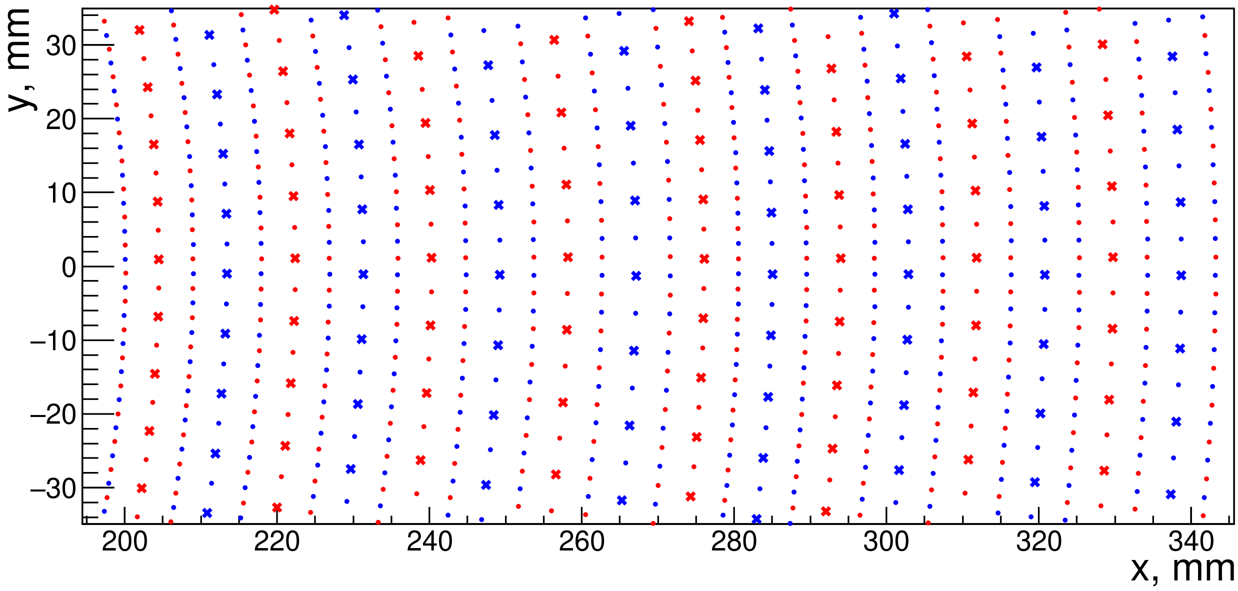


Рис. 8: Сигнальные (крестики) и полевые (точки) проволочки ДК в сечении $z = 0$ в крупном масштабе. Цвета соответствуют различным знакам стереоугла.

3,8×10^{-4} X_0 для газа и, в среднем, 10×10^{-4} X_0 и 7,8×10^{-4} X_0 для сигнальных и полевых проволочек, соответственно. Вклад проволочек в вещество ДК может быть уменьшен в несколько раз при использовании разрабатываемой в ИЯФ технологии магнетронного напыления металла на углеродную нить.

Таблица 1: Задаваемые (верхняя часть таблицы) и производные (нижняя часть) параметры геометрии ДК.

Параметр	**Значение**
Внутренний радиус R_{in}	200 мм
Внешний радиус R_{out}	800 мм
Длина L	1800 мм
Азимутальный угол между концами проволочки α	$\pi/6$ рад
Количество суперслоев $N_{\text{superlayers}}$	8
Количество слоев в суперслое N_{layers}	8
Диаметр и материал сигнальной проволочки	25 мкм, W
Диаметр и материал полевой проволочки	50 мкм, Al
Размер ячейки	≈ 7–9 мм
Стереоугол ϵ	≈ 60–220 мрад
Полное число сигнальных проволочек $N_{\text{signal wires}}$	21824

Полное число полевых проволочек $N_{\text{field wires}}$	109780

Алгоритм генерации геометрии ДК реализован на языке C++ с использованием фреймворка CERN ROOT [7]. Генератор геометрии был интегрирован в пакет программ моделирования детектора СЧТФ Aurora [8]. Для моделирования прохождения частиц через вещество геометрия ДК передается в GEANT4 [9] при помощи программного пакета DD4HEP [10]. Для ускорения процесса моделирования мы не создаем отдельных логических объемов (G4LogicalVolume) для каждой дрейфовой ячейки, так что весь газовый объем ДК является единым чувствительным объемом. При этом учет вещества проволочек осуществляется в двух вариантах:

- каждая проволочка размещается как отдельный объем. Заметим, что помещение проволочек в качестве дочерних объемов *непосредственно* в газовый объем ДК привело бы к радикальному замедлению работы моделирования из–за необходимости проверки пересечения с каждой из проволочек на каждом шаге трекинга в GEANT4. Во избежание этого на каждом слое проволочек помещаются фиктивные дочерние гиперболоидные слои, заполненные газом. Проволочки данного слоя располагаются как дочерние объемы соответствующего гиперболоидного слоя, толщина которого выбирается минимально достаточной для подобного включения. Такая иерархия объемов позволяет ограничить проверку пересечения с проволочками только одним слоем и выполнять ее только для шагов трекинга, находящихся внутри фиктивных слоев. Этот подход не приводит к существенному замедлению моделирования, однако значительно увеличивает время, затрачиваемое на инициализацию геометрии детектора в начале захода и требует большого объема памяти;

- вместо каждого слоя проволочек располагается равный ему по количеству вещества гиперболоидный слой с материалом, соответствующим материалу проволочек. Для обеспечения указанного равенства толщина гиперболоидного слоя в сечении $z = 0$ выбирается равной

$$h = \frac{n_{\text{wires}} l_{\text{wire}} r_{\text{wire}}^2}{2LR_{\text{layer}}}, \qquad (1)$$

где n_{wires} — число проволочек в слое, l_{wire} и r_{wire} — длина и радиус проволочек, R_{layer} — внутренний радиус слоя в сечении $z = 0$, L — длина ДК вдоль оси z.

Весь инструментарий, необходимый для работы с геометрией ДК, был помещен в отдельный пакет **DriftChamberFullStereoGeomGenerator**. Данный пакет используется на всех этапах моделирования от генерации геометрии проволочек до поиска и аппроксимации треков. Доступ к сгенерированной геометрии ДК на всех этапах моделирования осуществляется с помощью механизма DataExtensions пакета DD4HEP.

3. Моделирование сигнала, наведенного на проволочку

Релятивистская заряженная частица, пролетая через объём камеры, создает трек из ионизационных кластеров, состоящих из первичных и вторичных электронов. Электроны ионизации дрейфуют в скрещенных электрических и магнитных полях в направлении сигнальной проволочки, рождая в ее малой окрестности лавину (см. Рис. 9). Ионы, образовавшиеся в лавине, дрейфуют в направлении полевых проволочек, внося основной вклад в ток, наводимый в сигнальной проволочке. Процесс моделирования сигнала с проволочек состоит из следующих этапов:

- моделирование отдельного “шага” трекинга в пакете GEANT4;
- разыгрывание электронов ионизации, рожденных на данном шаге;
- ассоциация каждого электрона ионизации с ближайшей сигнальной проволочкой и моделирование его времени дрейфа и коэффициента усиления вызываемой им лавины;
- оцифровка сигнала с двух сторон проволочки.

Эффекты, связанные с рождением и дрейфом ионизации, лавинным усилением и наведением токового сигнала на проволочку изучались нами с использованием пакета Garfield++ [11].

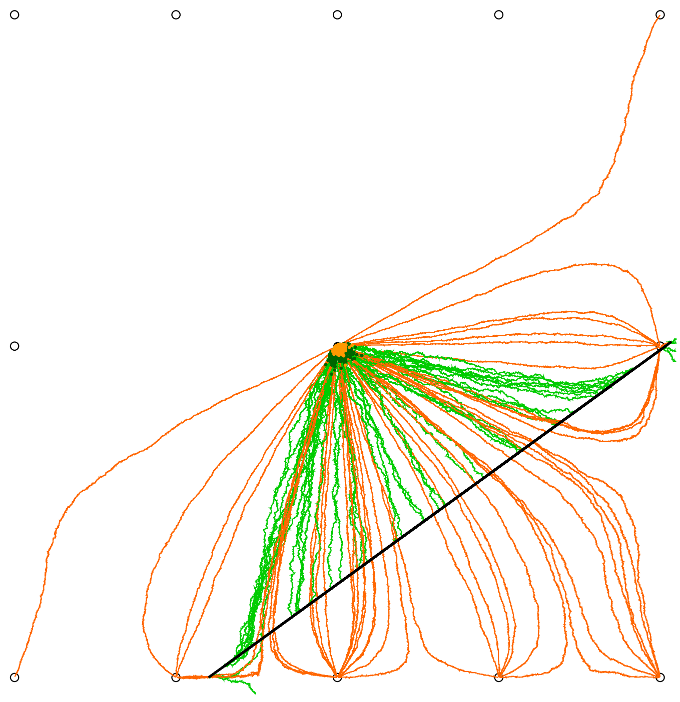


Рис. 9: Моделирование дрейфа ионизации и рождения электронно–ионной лавины в Garfield++. Черным изображен трек частицы, зеленые линии — электроны первичной и вторичной ионизации, оранжевые линии — ионы, рожденные в лавине вблизи проволочки (показано лишь несколько линий дрейфа).

3.1. Моделирование кластеров ионизации

Результатом моделирования прохождения частицы через вещество детектора в GEANT4 является коллекция "хитов", являющихся объектами класса G4Step. "Хит" представляет собой отдельный шаг трекинга с начальной и конечной точкой и полным энерговыделением. Для более тщательного трекинга мы устанавливаем верхний предел длины шага 1 см. Мы генерируем положения кластеров ионизации равномерно на спирали, натянутой между начальной и конечной точками "хита", до тех пор, пока их суммарная энергия не исчерпает энергию "хита". Под энергией кластера здесь подразумевается энергия, переданная релятивистской частицей в отдельном акте ионизации. Она разыгрывается нами в соответствии со спектрами передачи энергии, посчитанными с помощью Garfield++ для газовой смеси $HeiC_4H_{10}$ 90:10 и различных типов частиц ($e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, $\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$, $p^{\pm}$), летящих с различными скоростями. Было найдено, что для тяжелых частиц (т.е. всех, кроме $e^{\pm}$) спектры отличаются незначительно и практически не зависят от скорости, см. Рис. 10–11. Мы пренебрегаем зависимостью спектра передачи энергии для $e^{\pm}$ от скорости и используем спектр, посчитанный для π^{+} с импульсом 1 ГэВ/с, при вычислении энергии кластеров для всех типов частиц при любых скоростях.

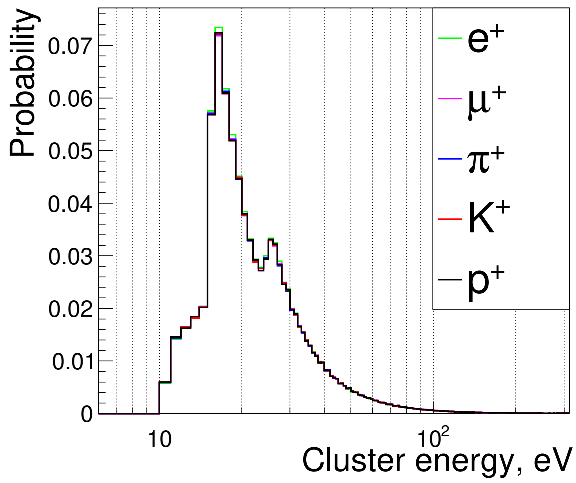


Рис. 10: Сравнение спектров энергии кластеров для различных типов частиц со скоростью $\beta = 0.99$.

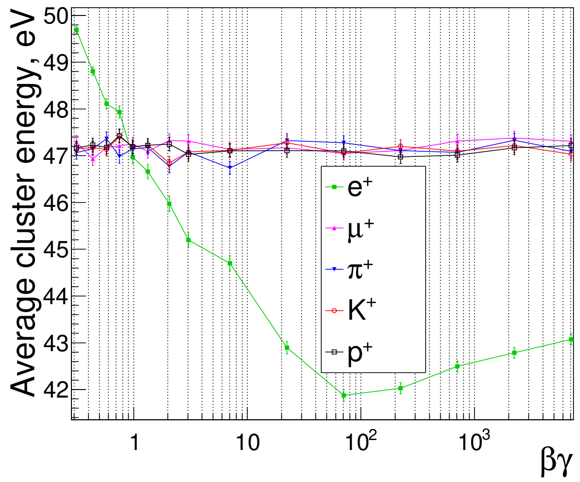


Рис. 11: Зависимость средней энергии кластера от скорости для различных типов частиц. Среднее считается для кластеров с энергией <10 кэВ.

Далее для каждого кластера ионизации необходимо сгенерировать число электронов в нем (“размер кластера”). В качестве примера на Рис. 12 показана зависимость числа электронов в кластере от его энергии для K^+. Garfield++ предсказывает для используемой газовой смеси значение средней энергии, затрачиваемой частицей на образование одного электрона ионизации $W = 29{,}52$ эВ. При данной энергии кластера E_{cl} число электронов в нем вычисляется по формуле $N_{el} = E_{cl}/W + \delta N_{el}$, где δN_{el} — случайная флуктуация, разыгрываемая с дисперсией $\sigma^2_{N_{el}} = FE_{cl}/W$, где F — фактор Фано. Garfield++ не предоставляет возможности расчета фактора Фано, поэтому мы останавляем его равным значению по умолчанию $F = 0.19$.

Основная зависимость характера ионизации от типа и импульса частицы проявляется не в энергии кластеров, а в их количестве на единицу длины dN_{clust}/dx, см. Рис. 13. По сравнению с распределением по удельным потерям энергии dE/dx, распределение dN_{clust}/dx не содержит свертки со спектром числа электронов в кластере и со спектром коэффициента лавинного усиления (см. Раздел 3.3), поэтому разрешение по dN_{clust}/dx выше, чем по dE/dx. Поскольку в проекте ДК СЧТФ предполагается использование подсчета числа кластеров (*cluster counting*) для идентификации типа частиц, наше моделирование разрабатывается с учетом этой возможности.

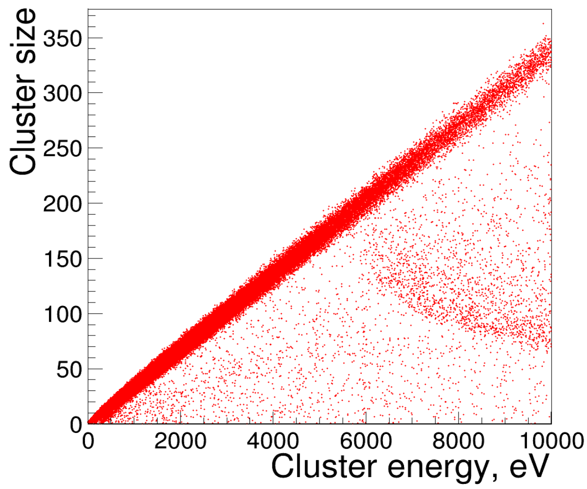


Рис. 12: Зависимость числа электронов в кластере от его энергии для K^+ с импульсом 200 МэВ/с.

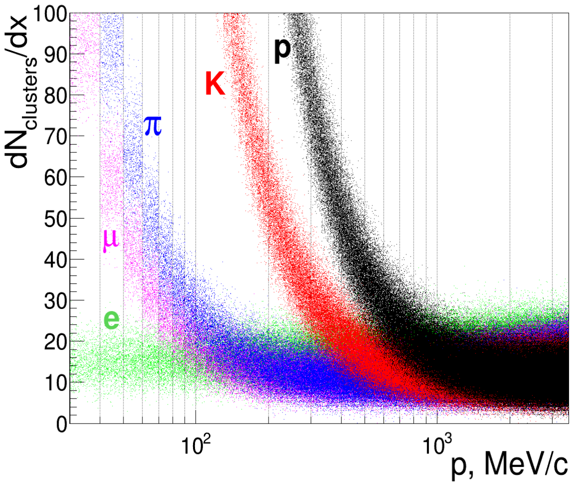


Рис. 13: Зависимость dN_{clust}/dx от импульса для e^+, μ^+, π^+, K^+, p^+ и газовой смеси HeiC$_4$H$_{10}$ 90:10 согласно Garfield++.

После разыгрывания кластеров ионизации каждый из них ассоциируется с ближайшей сигнальной проволочкой, с каждой из которых связывается ее собственная координатная система $O_w x_w y_w z_w$, в которой ось z_w выбирается вдоль направления проволочки, а ось x_w сонаправленно радиус–вектору проволочки $\overrightarrow{OO}_w \equiv \vec{r}_w = (r_w cos(\varphi_w), r_w sin(\varphi_w), 0)$ при $z = 0$, см. Рис. 14. Координаты кластера $\vec{r}_{cl}$ в лабораторной системе (ЛСК) пересчитываются в систему координат проволочки (СКП) по формуле

$$\vec{r}_{cl,w} = R_x(\epsilon) R_z(-\varphi_w)(\vec{r}_{cl} - \vec{r}_w) = \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\varphi_w) & sin(\varphi_w) & 0 \\ -sin(\varphi_w)cos(\epsilon) & cos(\varphi_w)cos(\epsilon) & -sin(\epsilon) \\ -sin(\varphi_w)sin(\epsilon) & cos(\varphi_w)sin(\epsilon) & cos(\epsilon) \end{bmatrix} (\vec{r}_{cl} - \vec{r}_w),$$

где $R_{z,x}$ — матрицы поворота вокруг осей z и x, ϵ — стереоугол проволочки. На Рис. 15 показаны ионизационные кластеры треков, рассматриваемые в СКП, почти все они заключены в пределах квадратной ячейки 10×10 мм^2.

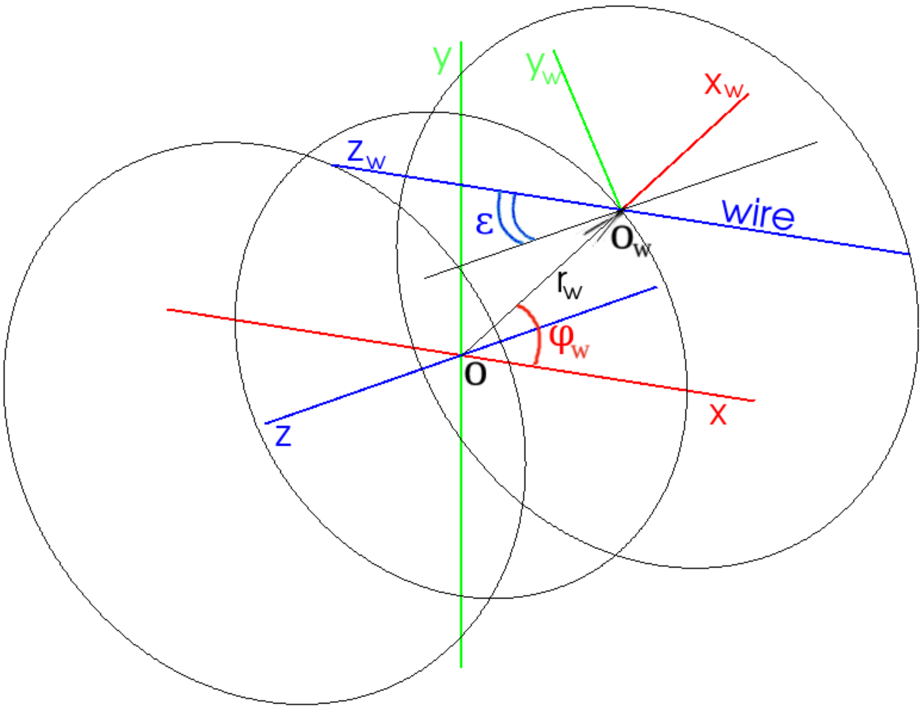


Рис. 14: Лабораторная $(Oxyz)$ и связанная с проволочкой $(O_w x_w y_w z_w)$ системы координат.

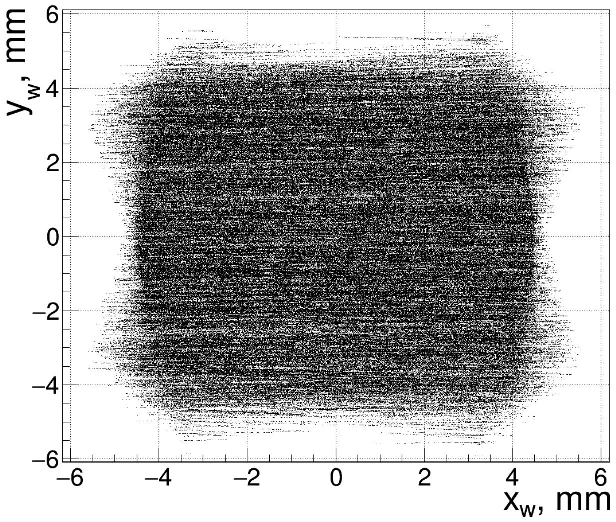


Рис. 15: Кластеры ионизации треков в СКП.

3.2. Моделирование дрейфа электронов

Время, затрачиваемое электроном ионизации на дрейф к сигнальной проволочке является случайной величиной с распределением, зависящим от координат точки начала дрейфа. Среднее этой случайной величины мы будем называть временем дрейфа t_{drift}, а флуктуацию относительно среднего — диффузионным разбросом t_{diff}. В простом случае ДК с полностью аксиальной конфигурацией проволочек, t_{drift} и t_{diff} являются скалярными функциями двух координат (x, y) точки начала дрейфа. Поскольку в ДК СЧТФ стереоугол проволочек невелик, аксиальность проволочек является неплохим начальным приближением для расчета карты времен дрейфа.

Мы проводим такой расчет с помощью пакета Garfield++ для квадратных ячеек $10{\times}10$ мм^2 с аксиальными проволочками, расположенными в периодической конфигурации, подобной реальной геометрии проволочек ДК СЧТФ. Для визуальной оценки распределения времен дрейфа мы также строим картину линий уровня функции t_{drift}, называемых изохронами, см. Рис. 16. Напряжение сигнальных проволочек выбрано равным 1650 В (см. Раздел 3.3), магнитное поле B = 1 Тл. Видно, что изохроны имеют близкую к круговой форму в значительной части объема ячейки. Карты времен дрейфа t_{drift} и t_{diff} сохраняются в виде экземпляров класса TH2F пакета CERN ROOT и используются при вычислении времени дрейфа во всех ячейках ДК СЧТФ при любой координате z.

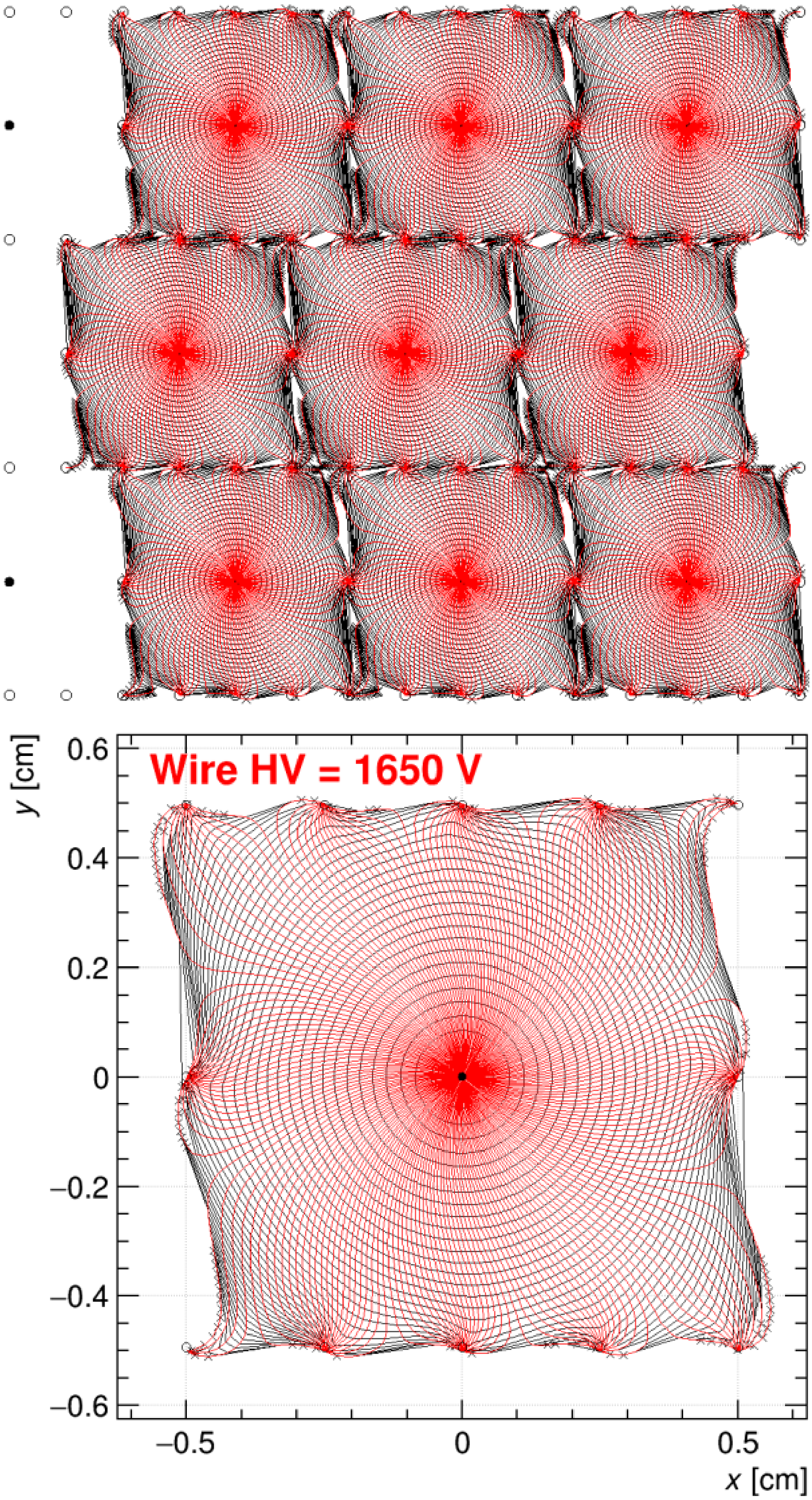


Рис. 16: Изохроны (черные кривые) и линии дрейфа (красные кривые), полученные в Garfield++ для аксиальных квадратных ячеек 10×10 мм^2. Напряжение сигнальных проволочек 1650 В, магнитное поле B = 1 Тл.

3.3. Моделирование сигнала, наведенного на проволочку

Число электронов в лавине, порожденной электроном ионизации, называется коэффициентом газового усиления K. Для достижения желаемого соотношения сигнал/шум на выходе разрабатываемого в ИЯФ прототипа усилителя–формирователя (УФО) для ДК СЧТФ требуется, чтобы среднее K ($\bar{K}$) было более 10^5. Отметим, что на величину $\bar{K}$ влияет возможная ионизация атомов примеси при передаче в столкновениях энергии возбуждения атомов основного газа (эффекты Пеннинга и Джезе). Вероятность P_{Penning} такой передачи энергии зависит от состава газа [12] и для смесей с гелием неизвестна, поэтому мы варьировали этот параметр. На Рис. 17 показана зависимость $\bar{K}$ от величины P_{Penning} при напряжении сигнальной проволочки (HV) 1650 В. Это значение HV и $P_{\text{Penning}} = 0,3$ используются в дальнейшем моделировании, при этом $\bar{K}$ составляет $3{,}6{\times}10^5$.

Коэффициент усиления K является случайной величиной, распределение которой хорошо аппроксимируется распределением Пойа [13]:

$$f(x) = \frac{(p+1)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} x^p e^{-(p+1)x}, \tag{3}$$

где $p \in [0,1]$. Из аппроксимации спектра K мы получили значение параметра $p = 0{,}69$, см. Рис. 18.

Токовый импульс в сигнальной проволочке главным образом индуцируется ионной компонентой лавины [14], его временная зависимость хорошо описывается формулой

$$I(t) = \frac{I(0)}{1 + t/t_0} \Theta(t), \tag{4}$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, t_0 — характерное время спада импульса. Последнее определялось нами путем усреднения сигналов от многих лавин и составило $t_0 = 1{,}08$ нс, см. Рис. 19.

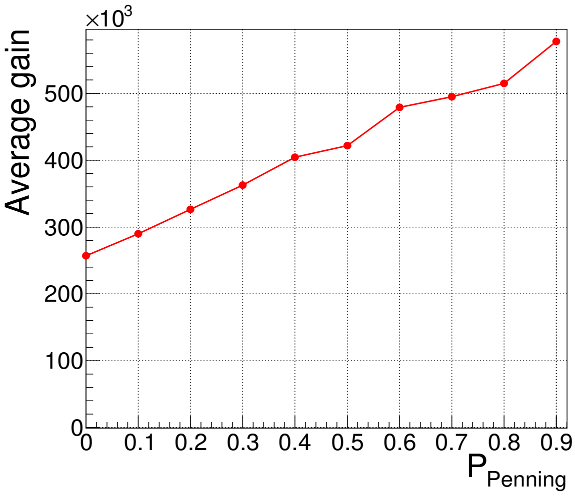


Рис. 17: Зависимость $\bar{K}$ от P_{Penning} при HV = 1650 В.

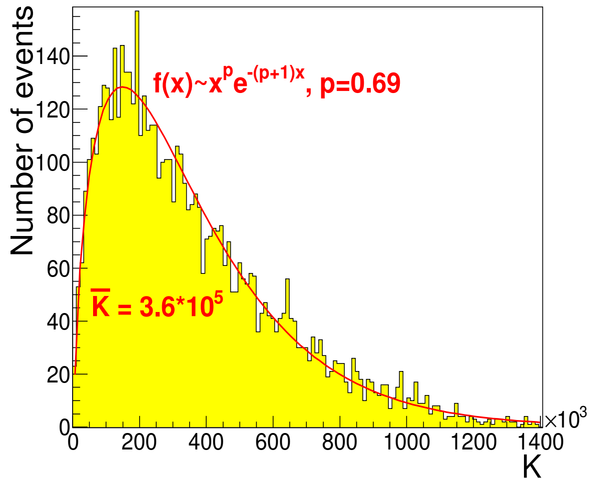


Рис. 18: Распределение K и его аппроксимация распределением Пойа при HV = 1650 В и $P_{\text{Penning}} = 0{,}3$.

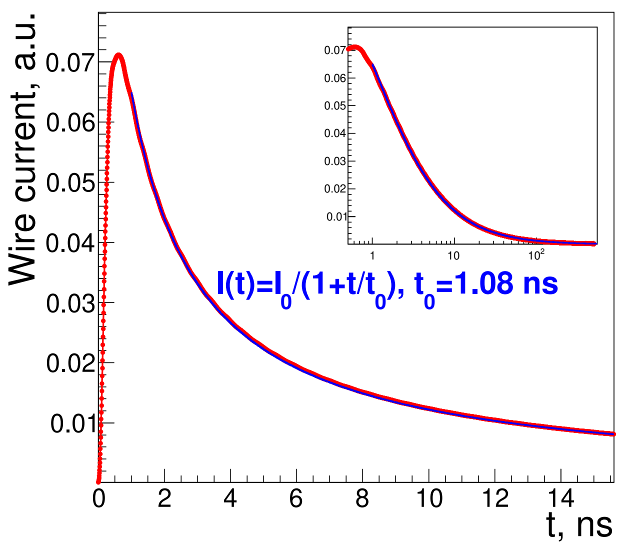


Рис. 19: Зависимость амплитуды усредненного токового импульса от времени (красная кривая) и ее аппроксимация (синяя кривая) функцией (4).

4. Оцифровка сигнала с проволочки

Токовый сигнал на обоих концах проволочки поступает на вход УФО. Разрабатываемый в ИЯФ СО РАН прототип УФО для ДК СЧТФ позволяет получить на выходе сигнальный пик протяженностью ≈ 2 нс. Малое сопротивление вольфрамовой сигнальной проволочки позволяет достичь малой зависимости формы сигнального пика от места рождения лавины вдоль проволочки. Для обеспечения возможности подсчета числа кластеров и определения времени соответствующих пиков сигнал на выходе УФО оцифровывается с частотой 2 ГГц в течение 300 нс ($\approx$ максимальное время дрейфа), см. Рис. 20–21. Для сигналов с обеих сторон проволочки учитывается их запаздывание при распространении вдоль проволочки, а также производится масштабирование их амплитуд. А именно, отношение амплитуд сигналов на конце $z > 0$ (A_+) и на конце $z < 0$ (A_-) равно

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{\rho_{\text{wire}} l_+ + R_{in}}{\rho_{\text{wire}} l_- + R_{in}}, \tag{5}$$

где $l_\pm$ — расстояние от места рождения лавины до конца проволочки с $z > 0$ и $z < 0$ соответственно, $\rho_{\text{wire}} = 112\ \Omega/\text{мм}$ — удельное сопротивление проволочки, $R_{in} = 373\ \Omega$ — входное сопротивление УФО.

Далее, просканированные амплитуды интегрируются (суммируются) в промежутке начиная за 2 нс до первого пика, превысившего порог срабатывания проволочки A_{thr}, до времени 5 нс после последнего пика, см. Рис. 21. Порог срабатывания A_{thr} выбирается равным $5\sigma_{\text{noise}}$, где σ_{noise} — среднеквадратичная амплитуда шума, выбираемая равной $1/8$ амплитуды сигнального пика от лавины со средним коэффициентом усиления.

Отметим, что сохранение просканированных амплитуд с проволочек для последующего анализа в оффлайн проблематично с точки зрения объема требуемой памяти. В реальном эксперименте предполагается реализация алгоритма поиска пиков прямо на считывающей плате [15], [16], и мы также планируем добавление этого алгоритма в наше моделирование.

5. Реконструкция хитов

Коллекции измеренных данных, поступающих с чувствительных элементов детекторной подсистемы, принято называть “сырыми хитами” (*raw hits*). “Сырой хит” с сигнальной проволочки ДК СЧТФ содержит в себе:

- проинтегрированные амплитуды с двух концов;
- измеренное время её срабатывания;
- информацию о времени и амплитуде пиков для просканированных сигналов с двух концов.

Реконструкция событий в ДК начинается с получения из “сырых хитов” коллекции “реконструированных хитов”, содержащих в себе оценку продольной и поперечной координаты пролета частицы относительно проволочки.

5.1. Реконструкция z–координаты методом деления заряда

Из формулы (5) следует, что проинтегрированные амплитуды с двух концов позволяют реконструировать z–координату пролета частицы методом деления заряда (МДЗ):

$$z = \left(\frac{l_{\text{wire}}}{2} + \frac{R_{in}}{\rho_{\text{wire}}}\right) \frac{A_+ - A_-}{A_+ + A_-}, \tag{6}$$

где l_{wire} — длина проволочки. Ошибка измерения z–координаты находится по формуле

$$\sigma_z = 2\left(\frac{l_{\text{wire}}}{2} + \frac{R_{in}}{\rho_{\text{wire}}}\right) \frac{\sqrt{A_+^2\sigma_{A_-}^2 + A_-^2\sigma_{A_+}^2}}{(A_+ + A_-)^2}, \tag{7}$$

где $\sigma_{A_\pm}$ — ошибки измерения амплитуд, вычисляемые через время интегрирования t_{int} и частоту сканирования f по формуле $\sigma_{A_\pm} = \sqrt{\sigma_{\text{noise}} t_{\text{int}} f}$.

На Рис. 22 приведено распределение разности между z–координатой пролета мюонов с импульсом 1 ГэВ/с, измеренной по МДЗ, и истинной z–координатой точки наибольшего приближения трека к проволочке. Видно, что точность измерения координаты по МДЗ составляет порядка 10 см, что не позволяет использовать это измерение в реконструкции треков. Однако, измерение по МДЗ может быть использовано для фильтрации случайных совпадений при одновременном срабатывании проволочек в соседних слоях. Заметим, что поскольку $R_{in}/\rho_{\text{wire}} \approx 3300$ мм $\gg l_{\text{wire}}/2 = 900$ мм, то σ_z могла бы быть уменьшена в 2–3 раза при использовании материала сигнальных проволочек с более высоким ρ_{wire} (например, вольфрам–рениевый сплав). Однако, увеличение ρ_{wire} привело бы к заметному искажению формы сигнальных пиков при распространении вдоль проволочки, что усложнило бы процедуру их поиска.

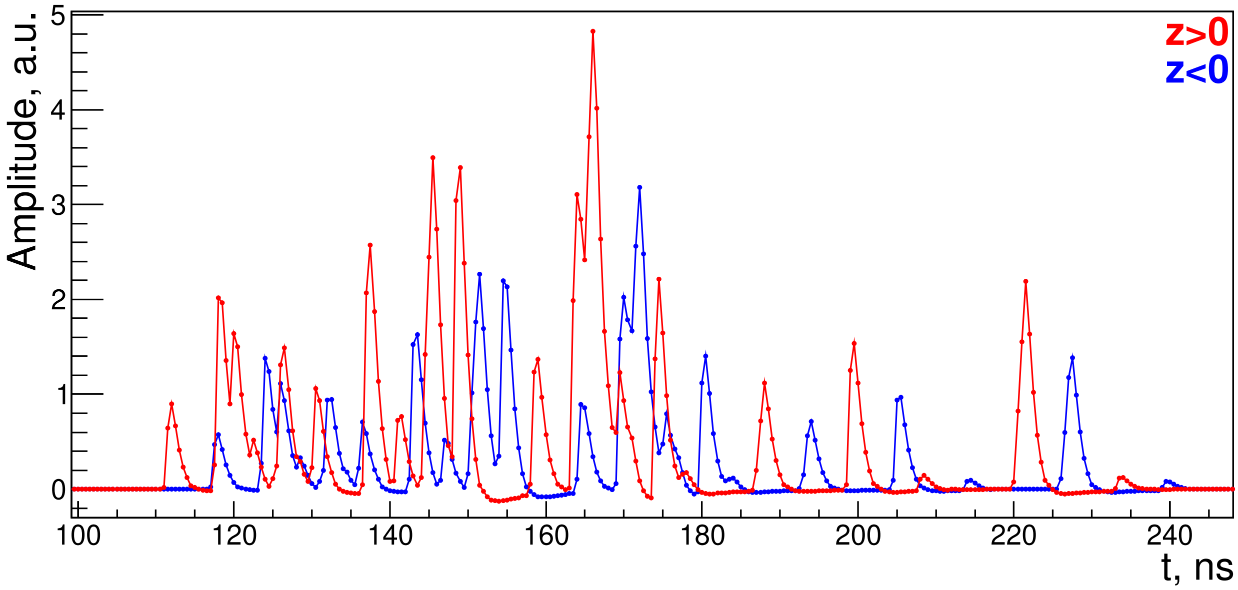


Рис. 20: Амплитуды сигналов от ионизации, произведенной мюоном с импульсом 1 ГэВ/с на выходах УФО на двух концах проволочки (без добавления шумов). Маркерами отмечены амплитуды, измеряемые с частотой 2 ГГц.

5.2. Реконструкция прицельного параметра трека

Прицельным параметром трека ρ_{PCA} относительно проволочки называется расстояние от проволочки до ближайшей к ней точки на треке (PCA — *point of closest approach*). Для оценки ρ_{PCA} производится вычисление рас-

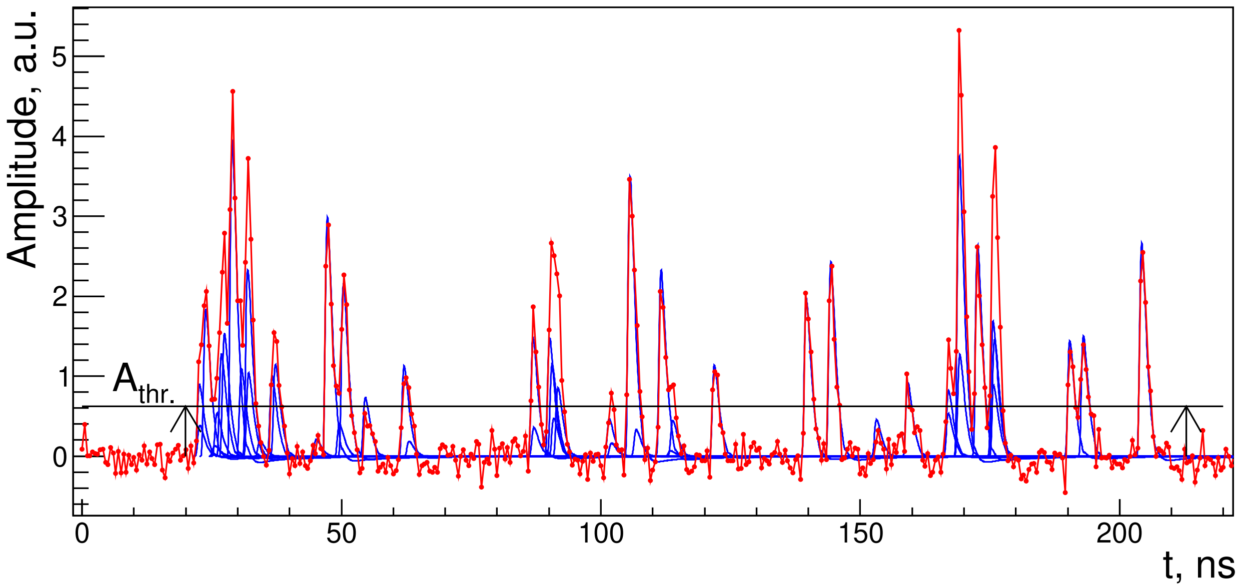


Рис. 21: Временная зависимость амплитуды сигнала от ионизации, произведенной мюоном с импульсом 1 ГэВ/с (с добавлением шумов), измеренная на конце проволочки с $z > 0$ (красная кривая). Синие кривые показывают вклады отдельных лавин в полный сигнал. Также показан порог срабатывания канала и временной промежуток интегрирования сигнала.

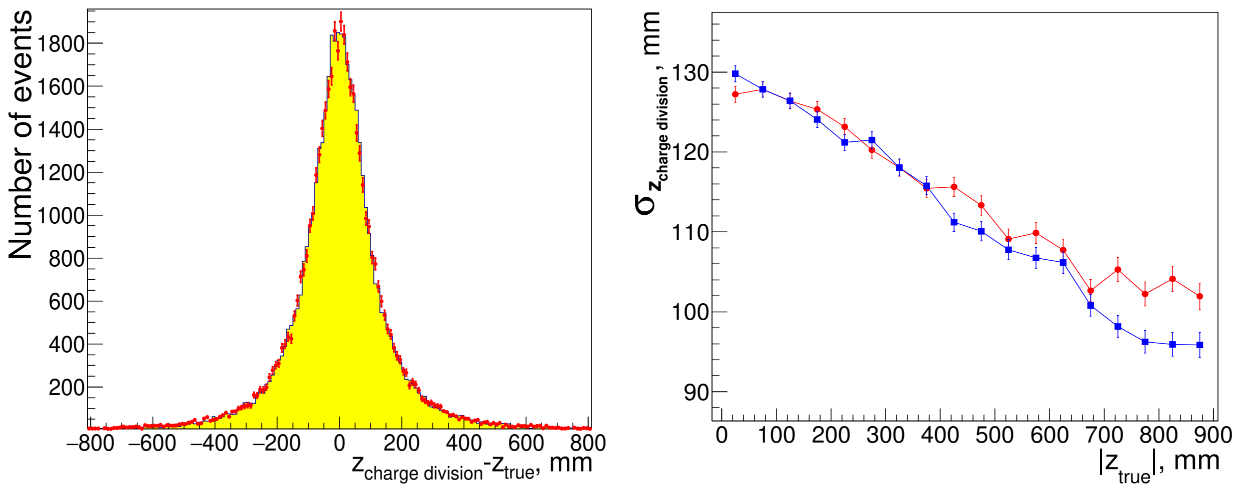


Рис. 22: Слева: распределение разности между z–координатой пролета мюонов с импульсом 1 ГэВ/с, измеренной по МДЗ, и истинной z–координатой точки наибольшего приближения трека к проволочке (красные маркеры). Желтая гистограмма показывает распределение разности этих координат, полученное путем разыгрывания в каждом событии случайной гауссовской величины с нулевым средним и со стандартным отклонением, вычисляемым по формуле (7). Справа: зависимость среднеквадратичного разброса спектров, изображенных слева, от модуля z–координаты пролета частицы (красные маркеры для измерения по МДЗ, синие — для разыгрывания по формуле (7)).

стояния $\rho_{\text{f.c.}}$ до “первого кластера”, т.е. электрона ионизации с минимальным временем дрейфа (f.c. — *first cluster*) в предположении, что именно он вызвал срабатывание проволочки. Оценка $\rho_{\text{f.c.}}$ производится на основе измеренного времени дрейфа t_{drift}, под которым подразумевается время срабатывания канала за вычетом времени пролета частицы от пучка до проволочки и времени распространения сигналов вдоль неё. На Рис. 23 показана зависимость $\rho_{\text{f.c.}}$ от t_{drift} для смоделированных пучковых мюонов с импульсом 1 ГэВ/c и равномерным распределением по телесному углу. Красный граф показывает среднее и дисперсию $\rho_{\text{f.c.}}$ в отдельных слоях по t_{drift}. Зависимость среднего $\bar{\rho}_{\text{f.c.}}$ от t_{drift} называется t–ρ–соотношением и используется для оценки расстояния от проволочки до первого кластера. На Рис. 24 показана ошибка измерения $\rho_{\text{f.c.}}$ в зависимости от t_{drift}, в основном обусловленная диффузией и обозначаемая $\sigma_{\text{diff.}}(t_{\text{drift}})$. Мы пренебрегаем малым вкладом шумов в точность измерения t_{drift} (т.н. *jitter*), а также вкладом, обусловленным зависимостью времени срабатывания от амплитуды сигнального пика (т.н. *time walk*) [14].

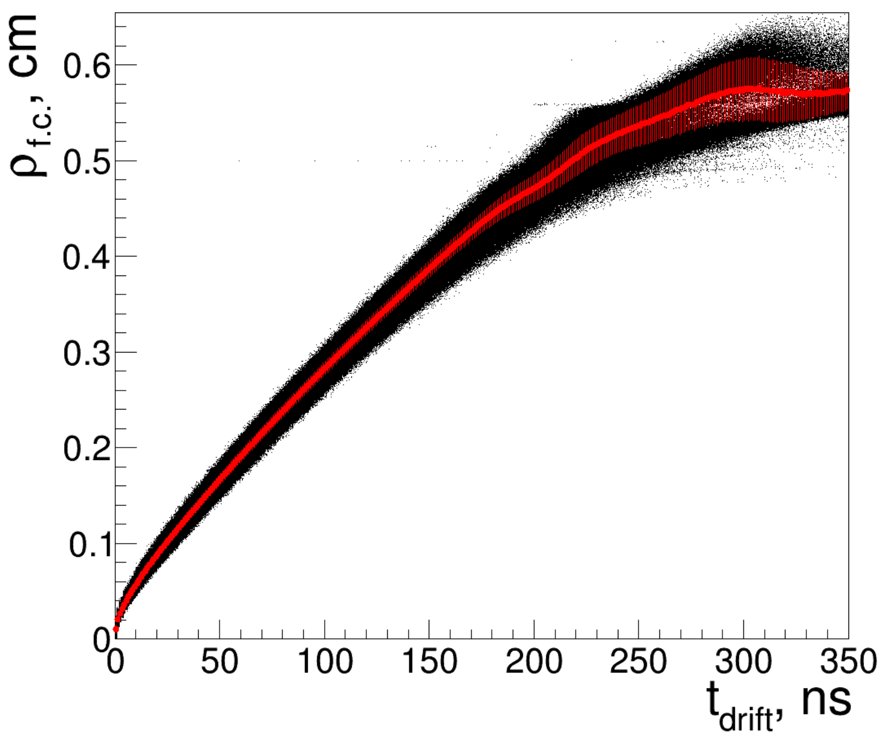


Рис. 23: Зависимость $\rho_{\text{f.c.}}$ от t_{drift} для смоделированных пучковых мюонов с импульсом 1 ГэВ/c. Красный граф показывает t–ρ–соотношение, его вертикальные ошибки — $\sigma_{\text{diff.}}(t_{\text{drift}})$.

Среднее расстояние до первого кластера $\bar{\rho}_{\text{f.c.}}(t_{\text{drift}})$ является несмещенной

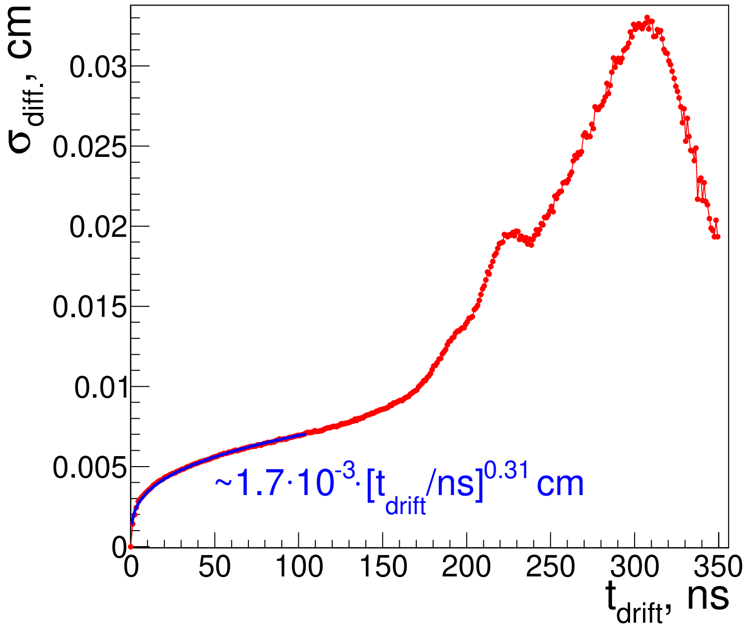


Рис. 24: Зависимость $\sigma_{\mathrm{diff.}}$ от t_{drift} (красные маркеры) и её аппроксимация при $t_{\mathrm{drift}} < 100$ нс (синяя кривая).

оценкой ρ_{PCA} только в пределе непрерывной ионизации $dN_{\mathrm{clust}}/dx \to +\infty$. Дискретность ионизации (т.н. “кластерный эффект”) делает данную оценку систематически завышенной и вносит дополнительную неопределенность в измерение прицельного параметра. Учет кластерного эффекта в оценке ρ_{PCA} может проводится с введением поправочной функции, компенсирующей систематический сдвиг оценки $\bar{\rho}_{\mathrm{f.c.}}$, и без введения такой функции. В нашем моделировании мы используем второй вариант, при этом добавочная неопределенность измерения ρ_{PCA}, вносимая кластерным эффектом, будет несколько выше.

На Рис. 25 показана зависимость разности $\rho_{\mathrm{f.c.}} - \rho_{\mathrm{PCA}}$ от ρ_{PCA}, где ρ_{PCA} — истинный прицельный параметр трека. Красные линии показывают величину корня из 2–го начального момента распределения $\rho_{\mathrm{f.c.}} - \rho_{\mathrm{PCA}}$ в зависимости от ρ_{PCA}, нарисованную отдельно на Рис. 26. Эта величина, обозначаемая далее $\sigma_{\mathrm{clust.eff.}}$, может служить оценкой вклада кластерного эффекта в неопределенность измерения ρ_{PCA}, её значение для треков, пролетающих через сигнальную проволочку, т.е. при $\rho_{\mathrm{PCA}} = 0$ равно $1/(2\overline{dN_{\mathrm{clust.}}/dx})$, где $\overline{dN_{\mathrm{clust.}}/dx}$ — среднее число кластеров на 1 см [17]. Из Рис. 26 следует, что $\overline{dN_{\mathrm{clust.}}/dx} \approx 11.4$ 1/см, что примерно соответствует ожидаемому значению для используемой газовой смеси [2].

С точки зрения реконструкции нас интересует приведенное выше распре-

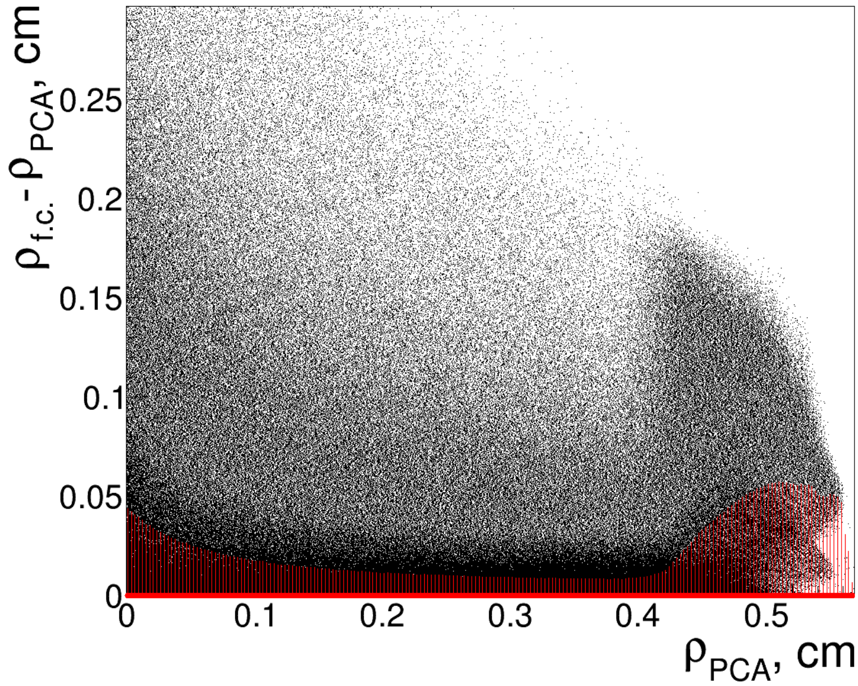


Рис. 25: Зависимость $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ от ρ_{PCA} для смоделированных пучковых мюонов с импульсом 1 ГэВ/c. Красные линии показывают величину корня из 2–го начального момента распределения $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ в отдельных слоях по ρ_{PCA}.

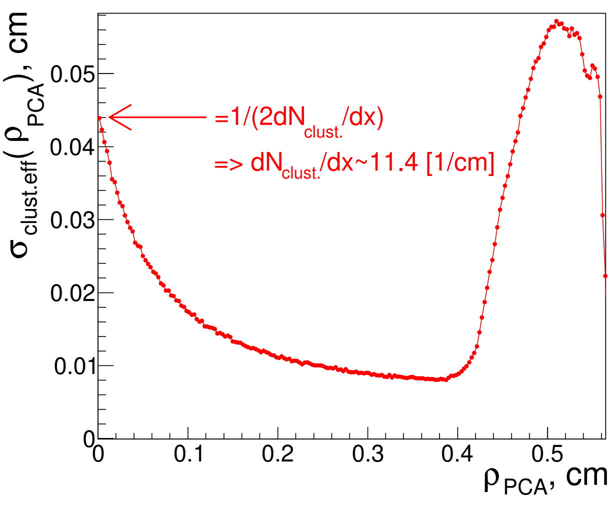


Рис. 26: Зависимость $\sigma_{\text{clust.eff.}}$ от ρ_{PCA}.

деление $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ в зависимости не от ρ_{PCA}, а от измеряемой величины t_{drift}, см. Рис. 27. Как и прежде, красные линии показывают величину корня из 2–го начального момента распределения $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ в отдельных слоях по t_{drift}, нарисованную отдельно на Рис. 28. Эта величина используется нами в качестве оценки вклада кластерного эффекта в неопределенность измерения ρ_{PCA}.

Итак, реконструированный хит ДК в качестве измерения прицельного параметра трека принимает $\bar{\rho}_{\text{f.c.}}(t_{\text{drift}})$, а в качестве ошибки этого измерения — $\sigma_{\rho_{\text{PCA}}} \equiv \sqrt{\sigma^2_{\text{diff.}}(t_{\text{drift}}) + \sigma^2_{\text{clust.eff.}}(t_{\text{drift}})}$. Наконец, на Рис. 29 показаны $\sigma_{\text{diff.}}$, $\sigma_{\text{clust.eff.}}$ и $\sigma_{\rho_{\text{PCA}}}$ как функции ρ_{PCA}. Зависимость $\sigma_{\text{diff.}}(\rho_{\text{PCA}})$ была получена в специальном моделировании, в котором в каждой ячейке рассматривался только один кластер ионизации, искусственно помещаемый в точку наибольшего приближения трека к проволочке, благодаря чему достигалось "отключение" кластерного эффекта.

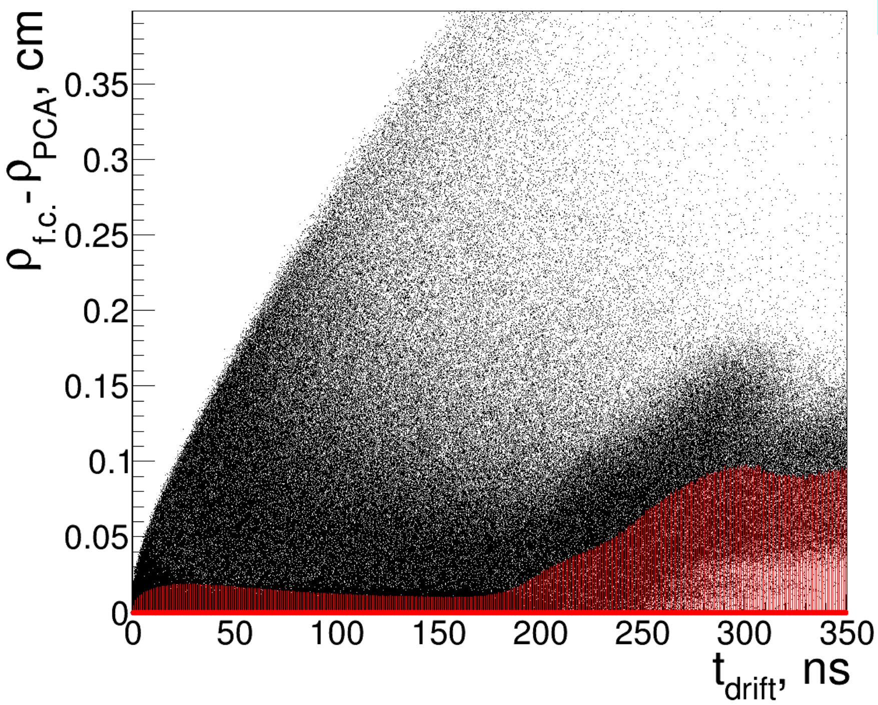


Рис. 27: Зависимость $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ от t_{drift} для смоделированных пучковых мюонов с импульсом 1 ГэВ/с. Красные линии показывают величину корня из 2–го начального момента распределения $\rho_{\text{f.c.}} - \rho_{\text{PCA}}$ в отдельных слоях по t_{drift}.

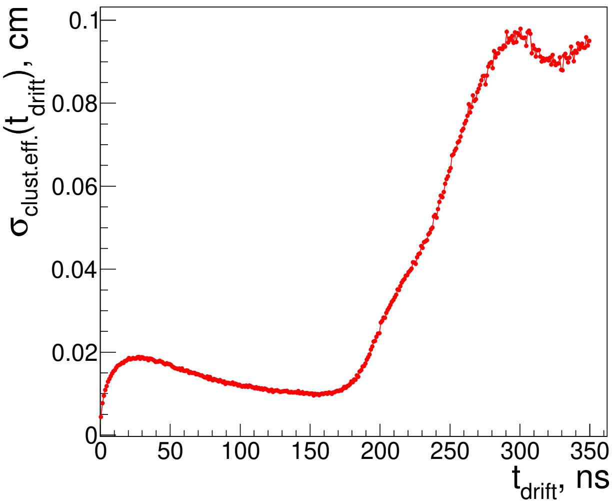


Рис. 28: Зависимость $\sigma_{\text{clust.eff.}}$ от t_{drift}.

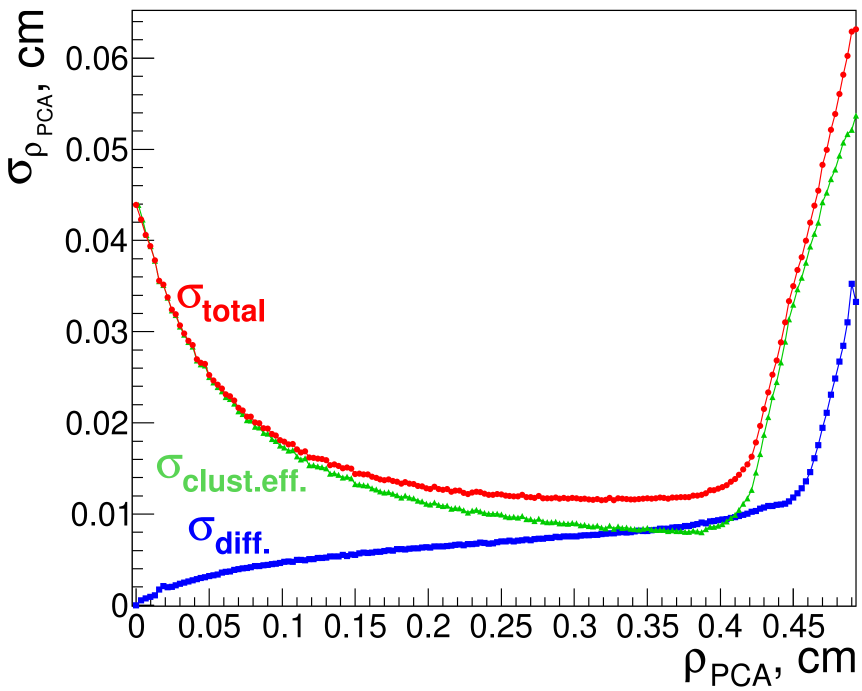


Рис. 29: Ошибки измерения ρ_{PCA}, обусловленные диффузией (синие маркеры), кластерным эффектом (зеленые маркеры) и полная ошибка (красные маркеры) как функции ρ_{PCA}.

5.3. Реконструкция точечных хитов

При добавлении к реконструированному хиту информации о направлении пролета частицы вблизи проволочки становится возможным его преобразование в *точечный хит*. Оценка направления пролета, а также уточненная z–координата хита могут быть получены на выходе алгоритма *поиска треков*. К настоящему времени реализованы лишь отдельные элементы этого алгоритма (см. Раздел 6.2), поэтому информация о направлении пролета частицы берется нами из моделирования. Также предполагается, что алгоритм поиска позволяет разрешать неопределенность "лево–право", т.е. неопределенность в стороне пролета частицы относительно проволочки.

На Рис. 30 показана траектория частицы, касающаяся (с точностью до ошибок измерения) круговых изохрон сработавших проволочек. В точках изохрон, где касательная к ним параллельна направлению пролета частицы, расположены точечные хиты. Для использования точечного хита при аппроксимации треков необходимо найти ковариационную матрицу его координат в ЛСК. Заметим, что эта матрица имеет диагональный вид

$$cov(x'_w, y'_w, z'_w) = \begin{bmatrix} \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\rho_{\mathrm{PCA}}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_z \end{bmatrix} \qquad (8)$$

в системе координат $O_w x'_w y'_w z'_w$ (см. Рис. 31), получающейся из системы координат проволочки $O_w x_w y_w z_w$ поворотом вокруг оси Oz_w на угол ψ такой, чтобы ось $O_w x'_w$ была параллельна проекции направления пролета $\vec{\tau}$ частицы в PCA на плоскость $O_w x_w y_w$. В данной ковариационной матрице $\sigma_{\rho_{\mathrm{PCA}}}$ — ошибка измерения прицельного параметра, σ_z — ошибка измерения z–координаты, получаемая на выходе алгоритма поиска треков, $\delta \equiv 0.01 \cdot \min\{\sigma_{\rho_{\mathrm{PCA}}}, \sigma_z\}$ — малый регуляризационный параметр, вводимый искусственно для обеспечения положительной определенности матрицы. Поскольку алгоритм поиска треков пока не реализован, σ_z является конфигурируемым параметром моделирования.

Имея ввиду формулу 2, якобиан перехода из $O_w x'_w y'_w z'_w$ в ЛСК вычисляется как

$$
\begin{aligned}
J &= R_z(\varphi_w)R_x(-\epsilon)R_z(\psi) = [\vec{e}_{x'_w}, \vec{e}_{y'_w}, \vec{e}_{z'_w}], \\
\vec{e}_{x'_w} &= \begin{bmatrix} cos(\varphi_w)cos(\psi) - sin(\varphi_w)sin(\psi)cos(\epsilon) \\ sin(\varphi_w)cos(\psi) + cos(\varphi_w)sin(\psi)cos(\epsilon) \\ -sin(\psi)sin(\epsilon) \end{bmatrix}, \\
\vec{e}_{y'_w} &= \begin{bmatrix} -cos(\varphi_w)sin(\psi) - sin(\varphi_w)cos(\psi)cos(\epsilon) \\ -sin(\varphi_w)sin(\psi) + cos(\varphi_w)cos(\psi)cos(\epsilon) \\ -cos(\psi)sin(\epsilon) \end{bmatrix}, \\
\vec{e}_{z'_w} &= \begin{bmatrix} -sin(\varphi_w)sin(\epsilon) \\ cos(\varphi_w)sin(\epsilon) \\ cos(\epsilon) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{9}
$$

и ковариационная матрица координат хита в ЛСК находится линейным распространением ошибок:

$$cov(x, y, z) = J \cdot cov(x'_w, y'_w, z'_w) \cdot J^T. \tag{10}$$

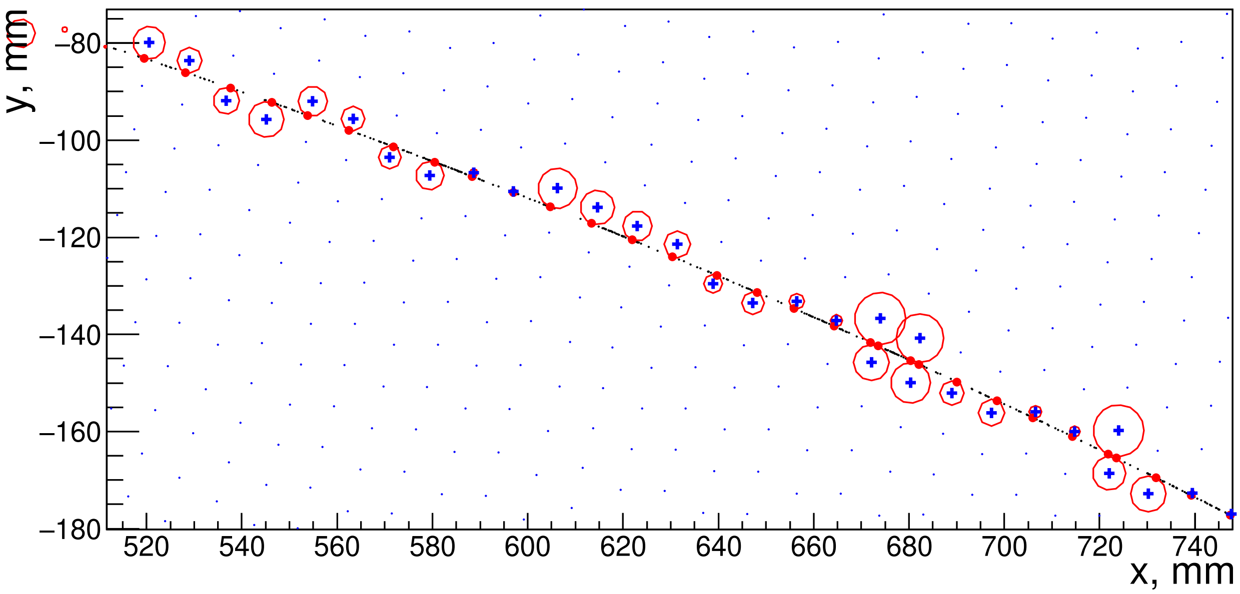


Рис. 30: Трек частицы, касающийся (с точностью до ошибок измерения) круговых изохрон (красные кружки) сработавших проволочек (синие крестики). Черными точками показаны отдельные кластеры ионизации, красными маркерами — точечные хиты на изохронах, расположенные в точках касания к ним прямых, параллельных направлению пролета частицы.

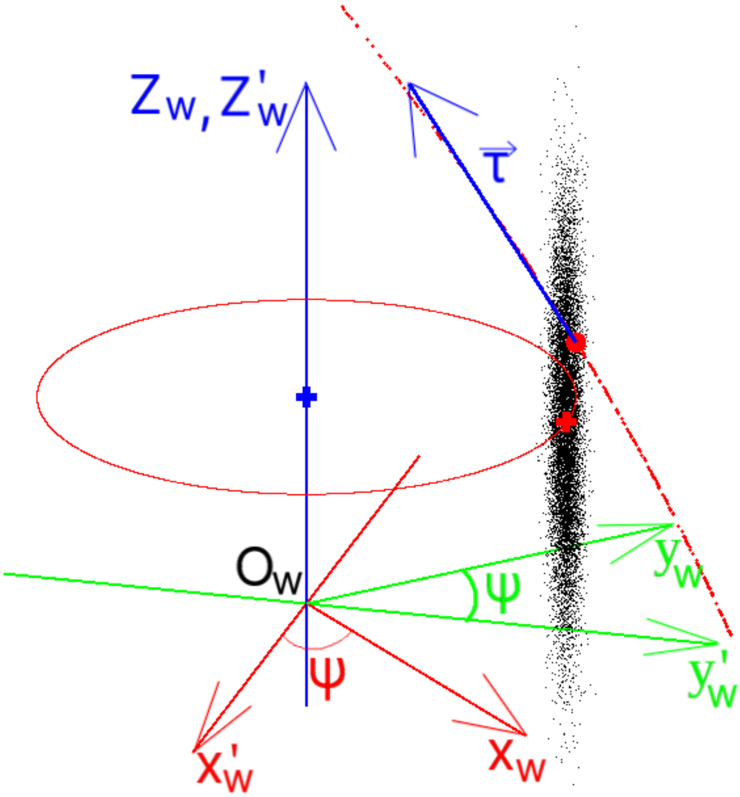


Рис. 31: Трек частицы, касающийся (с точностью до ошибок измерения) круговой изохроны (красный кружок) сработавшей проволочки (ось $O_w z_w$). Красными точками показаны отдельные кластеры ионизации, красным круглым маркером — первый кластер по времени дрейфа, красным крестиком – точечный хит на изохроне. "Облако" черных точек показывает неопределенность положения точечного хита, описываемую ковариационной матрицей (8). Угол ψ является азимутальным углом направления пролета частицы $\vec{\tau}$ мимо проволочки в СКП $O_w x_w y_w z_w$.

6. Реконструкция треков

6.1. Параметризация трека

Траектория частицы с зарядом $q \neq 0$, двигающейся с импульсом $\vec{p}$ без потерь энергии в однородном магнитном поле $\vec{B}$ представляет собой спираль. При $\vec{B}$ направленном вдоль оси z xy–проекция траектории является окружностью радиуса $R = p_\perp/(|q\vec{B}|)$ (далее — "окружность трека"), где $p_\perp$ — поперечный импульс, см. Рис. 32. Спираль трека может быть описана набором из пяти параметров:

- кривизна окружности трека $k = q/R = q|\vec{B}|/p_\perp$, взятая с предполагаемым знаком заряда частицы;
- прицельный параметр ρ, т.е. кратчайшее расстояние от начала координат до окружности трека. Точки спирали трека, ближайшие к оси z, далее называются точками наибольшего приближения (PCA). Параметры трека рассматриваются относительно одной PCA, как правило, ближайшей к месту столкновения пучков. Параметр ρ берется отрицательным, если окружность трека заключает в себе начало координат и положительным в противном случае;
- азимутальный угол φ касательной к окружности трека в PCA;
- котангенс полярного угла $ctg(\theta)$ касательной к спирали трека в PCA;
- z_0 — z–координата PCA.

Удобным параметром спирали трека является длина дуги его окружности s, отсчитываемая от PCA в направлении, задаваемом в этой точке вектором $\vec{\tau} = (cos(\varphi), sin(\varphi))$, отвечающим предполагаему направлению движения частицы. Зависимость s от z–координаты точки спирали является линейной: $s(z) = \mathrm{tg}\theta(z - z_0)$, см. Рис. 33.

6.2. Поиск треков

Реконструкция треков в ДК начинается с этапа *поиска треков*, состоящего в сортировке хитов по коллекциям по признаку предполагаемого

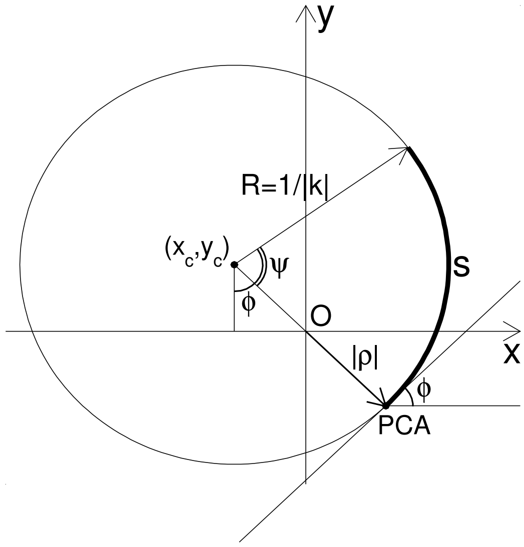


Рис. 32: Проекция спирали трека на xy–плоскость.

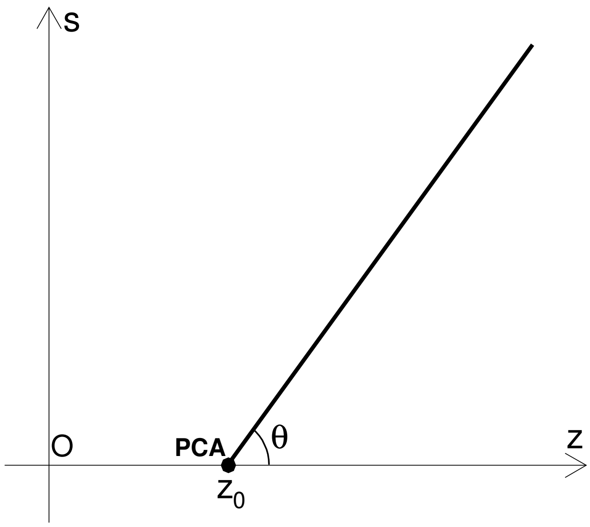


Рис. 33: Зависимость от z длины дуги окружности трека, отсчитываемой от PCA.

срабатывания от одной и той же пролетевшей частицы. Каждая такая коллекция, обычно называемая трек–кандидатом (*track candidate*), в свою очередь служит входной коллекцией для алгоритма аппроксимации трека, см. Раздел 6.3.

Алгоритмы поиска треков (АПТ) принято разделять на глобальные и локальные [18]. Глобальные алгоритмы (гистограммирование, преобразования Лежандра и Хафа и др.) позволяют работать со всеми хитами подходящего типа одновременно [19], [20]. Локальные алгоритмы (клеточные автоматы, *track following* и др.) осуществляют пошаговую экстраполяцию трека и ассоциацию с ним новых хитов начиная с небольшого трекового сегмента [21].

Специфика full–stereo геометрии ДК СЧТФ заключается в отсутствии аксиальных слоев и достаточно точного измерения z–координаты хита. Из этого следует, что для хитов отсутствует единая плоскость, проекция на которую не искажала бы круговую форму траектории. В свою очередь, круговая форма траектории могла бы быть распознана с помощью поиска наиболее заселенных областей в параметрическом пространстве при преобразованиях Лежандра или Хафа, т.е. глобальными АПТ. Так, благодаря наличию аксиальных слоев в ДК детекторов BaBar [22] и Belle(2) [23] возможно применение глобальных АПТ, тогда как в full–stereo камерах детекторов KLOE(2) [24] и MEG2 [25] в реконструкции в основном используются локальные алгоритмы.

Разрабатываемый нами локальный АПТ ДК СЧТФ представляет собой *track following* алгоритм со следующей последовательностью действий:

- осуществляется реконструкция *дублетов* хитов, т.е. пар пересекающихся сработавших проволочек в соседних слоях;
- осуществляется реконструкция *цепей дублетов*, служащих начальными сегментами треков, подлежащими дальнейшей экстраполяции [26];
- производится экстраполяция сегмента трека и ассоциация с ним новых хитов. Поскольку параметры трека известны с конечной точностью, могут возникать несовместимые варианты ассоциации хитов. В таком случае процесс экстраполяции ветвится и продолжается независимо для каждой ветви. В итоге получаем дерево сценариев экстраполяции [27];
- когда для всех ветвей дерева возможности экстраполяции исчерпаны, в качестве окончательного трек–кандидата выбирается ветвь с наибольшим значением *функции качества*. Последняя вычисляется на основе информации о суммарном χ^2 ассоциированных хитов, количестве шагов экстраполяции и количестве не сработавших, но пересеченных слоев.

В настоящее время реализованы лишь начальные шаги описанного АПТ — реконструкция дублетов хитов и цепей дублетов. Поэтому для создания коллекции трек–кандидатов вместо АПТ используется информация об идентификаторе частицы, породившей ионизационные кластеры, вызвавшие срабатывание проволочки.

6.2.1. Реконструкция дублетов хитов

Пара сработавших проволочек в соседних слоях объединяется нами в дублет, если z–координата середины их общего перпендикуляра ($z_{\text{doublet PCA}}$) находится в пределах длины ДК. При необходимости фильтрации случайных совпадений к этому условию добавляется требование на соответствие $z_{\text{doublet PCA}}$ z–координатам хитов, измеренным по МДЗ. Величина

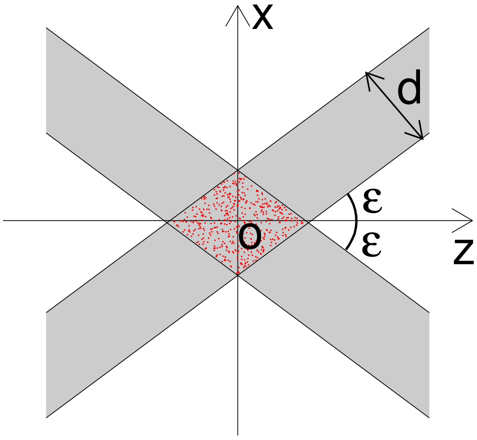
$z_{\text{doublet PCA}}$ служит неплохой начальной оценкой z–координаты пролета частицы, вызвавшей одновременное срабатывание проволочек. Разрешение по z–координате частицы может быть оценено вычислением дисперсии вдоль оси z точек, попадающих внутрь области пересечения полосок на Рис. 34, что дает

$$\sigma_{z,\text{doublet PCA}} = \frac{d}{\sqrt{24} sin(\epsilon)}, \tag{11}$$

где d — размер дрейфовой ячейки, ϵ — стереоугол. Эта оценка для каждого слоя ДК хорошо согласуется с точными значениями разрешений, полученными в моделировании из аппроксимации спектров $z_{\text{doublet PCA}} - z_{\text{true}}$, где z_{true} — истинная z–координата пролета частицы, измеренная в точке наибольшего приближения трека к проволочке. Итого, мы приписываем реконструированному дублету z–координату, равную $z_{\text{doublet PCA}}$ и её неопределенность, вычисляемую по формуле (11).

Далее, мы аппроксимируем эллипсы, образованные сечением дрейфовых цилиндров обоих проволочек плоскостью $z = z_{\text{doublet PCA}}$ кругами равной площади, см. Рис. 36. Пренебрегая поворотом частицы в магнитном поле на масштабе нескольких ширин ячейки, мы можем реконструировать четыре касательных сегмента, отвечающих четырем возможным направлениям пролета частицы. Формулы для всех четырех направлений являются структурно одинаковыми, отличаясь лишь знаками $s_{0,1,2}$ при некоторых величинах. Внешним касательным соответствуют наборы знаков $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ и $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, внутренним — $s_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ и $s_0 = -1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$. Пусть $(x_{0,1}, y_{0,1})$ — центры дрейфовых окружностей, $\rho_{0,1}$ — их радиусы, $\vec{d}_{0,1}$ — трехмерные векторы направления проволочек. Введем обозначения,

$$\begin{aligned}
r_{0,1} &\equiv s_{0,1}\rho_{0,1}, \;\; \Delta r \equiv s_0\rho_0 - s_1\rho_1, \\
\Delta x &\equiv x_0 - x_1, \;\; \Delta y \equiv y_0 - y_1, \\
\Delta^2 &\equiv \Delta x^2 + \Delta y^2, \;\; \gamma \equiv s_2\sqrt{\Delta^2 - \Delta r^2},
\end{aligned} \tag{12}$$



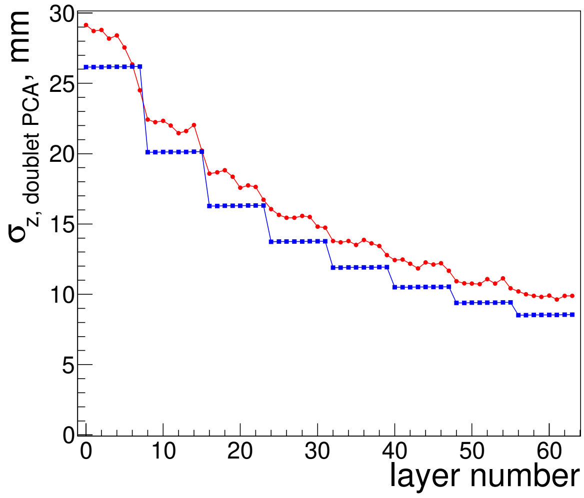


Рис. 34: Условное изображение пересекающихся дрейфовых ячеек шириной d и стереоуглами $\pm\epsilon$ в соседних слоях. Равномерно распределенные красные точки обозначают места пересечения летящими частицами границ обоих ячеек.

Рис. 35: Разрешение по z–координате пролета частицы, измеренной по месту пересечения сработавших проволочек в зависимости от номера слоя. Красные маркеры соответствуют точным значениям, полученным из моделирования, синие маркеры — оценке по формуле (11).

в этих терминах нормаль к касательному сегменту записывается как

$$\vec{n} = (\Delta r \Delta x + \gamma \Delta y, \Delta r \Delta y - \gamma \Delta x)/\Delta^2,$$

а искомые точки начала и конца сегмента находятся по формуле

$$P_{0,1} = (x_{0,1}, y_{0,1}) - r_{0,1}\vec{n}. \tag{13}$$

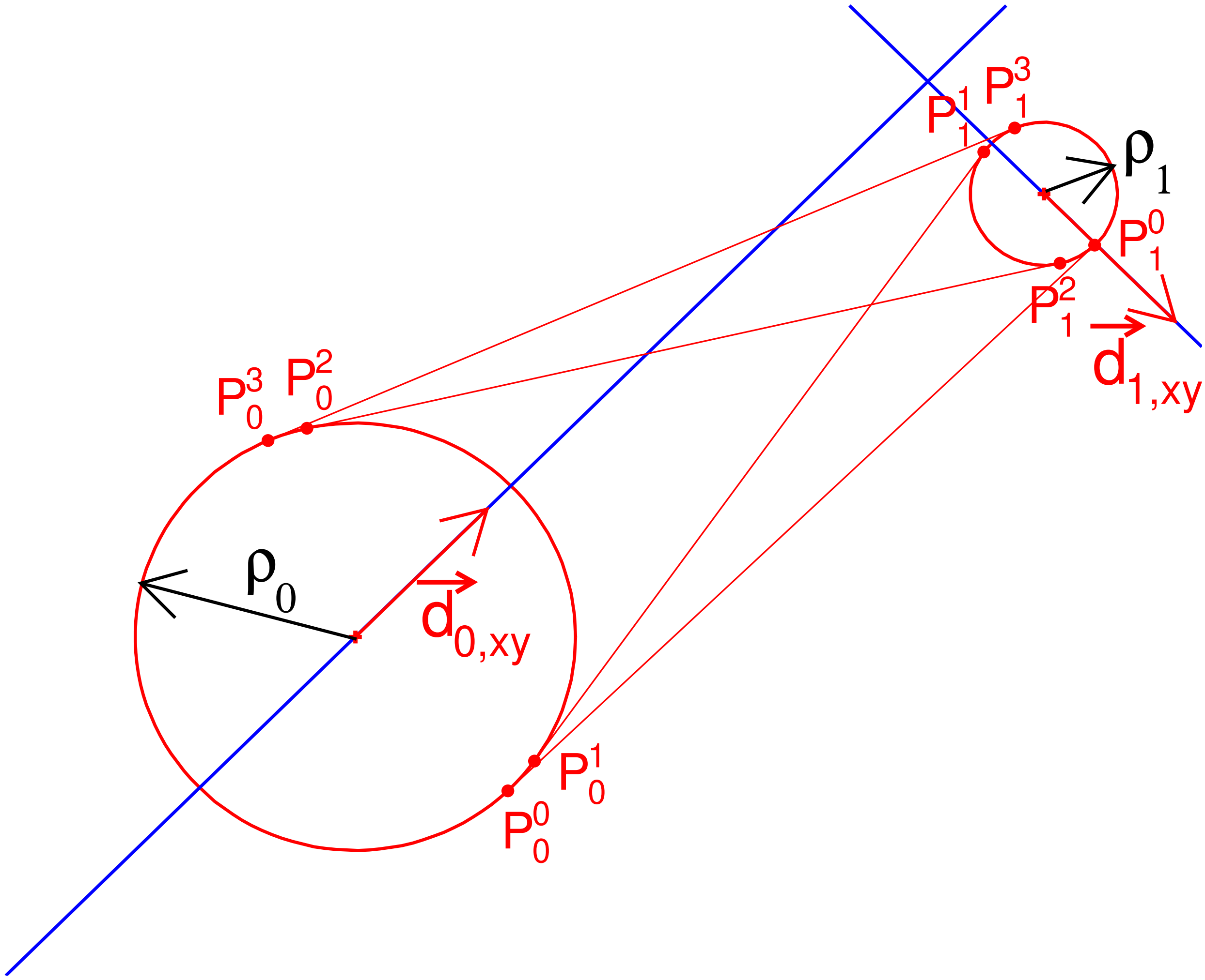


Рис. 36: Дублет сработавших проволочек в сечении $z = z_{\text{doublet PCA}}$. Синие прямые показывают xy–проекции проволочек, единичные направляющие векторы вдоль которых равны $\vec{d}_{0,1}$. Пары точек $P^j_{0,1}$, $j = 0, 1, 2, 3$ задают четыре касательных сегмента, соответствующих возможным направлениям пролета частицы.

Координаты точек касания дрейфовых окружностей зависят от их радиусов $\rho_{0,1}$ и от z–координат их центров $z_{0,1}$. Последние предполагаются независимо распределенными со средним, равным $z_{\text{doublet PCA}}$ и дисперсиями $\sigma^2_{z_{0,1}} = \sigma^2_{z,\text{doublet PCA}}$. Для вычисления ковариационных матриц координат точек касания необходимо выполнить линейное распространение ошибок по формуле

$$cov(P_{i,x}, P_{i,y}) = J \begin{bmatrix} \sigma^2_{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{z_1} \end{bmatrix} J^T, i = 0, 1, \tag{14}$$

с якобианом

$$J = \frac{\partial(P_{i,x}, P_{i,y})}{\partial(\rho_0, \rho_1, z_0, z_1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{i,x}}{\partial \rho_0} & \frac{\partial P_{i,x}}{\partial \rho_1} & \frac{\partial P_{i,x}}{\partial z_0} & \frac{\partial P_{i,x}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial P_{i,y}}{\partial \rho_0} & \frac{\partial P_{i,y}}{\partial \rho_1} & \frac{\partial P_{i,y}}{\partial z_0} & \frac{\partial P_{i,y}}{\partial z_1} \end{bmatrix}, i = 0, 1. \tag{15}$$

В обозначениях

$$\begin{aligned} \Delta r &\equiv s_i\rho_i - s_{1-i}\rho_{1-i}, \\ \Delta x &\equiv x_i - x_{1-i}, \;\; \Delta y \equiv y_i - y_{1-i}, \\ \gamma &\equiv (-1)^i s_2 \sqrt{\Delta^2 - \Delta r^2}, \;\; i = 0, 1, \end{aligned}$$

элементы этого якобиана вычисляются по формулам

$$\frac{\partial P_{i,x}}{\partial \rho_i} = -\frac{s_i}{\Delta^2}(\Delta x \Delta r + \Delta y \gamma + r_i(\Delta x - \Delta y \Delta r/\gamma))$$

$$\frac{\partial P_{i,y}}{\partial \rho_i} = -\frac{s_i}{\Delta^2}(\Delta y \Delta r - \Delta x \gamma + r_i(\Delta y + \Delta x \Delta r/\gamma))$$

$$\frac{\partial P_{i,x}}{\partial \rho_{1-i}} = -\frac{r_i s_{1-i}}{\Delta^2}(\Delta x - \Delta y \Delta r/\gamma)$$

$$\frac{\partial P_{i,y}}{\partial \rho_{1-i}} = -\frac{r_i s_{1-i}}{\Delta^2}(\Delta y + \Delta x \Delta r/\gamma)$$

$$\frac{\partial P_{i,x}}{\partial z_0} = \frac{d_{0,x}}{d_{0,z}}(1-i) + (-1)^i\Bigg(\frac{2r_i}{\Delta^4}\Bigg(\Delta x\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \Delta y\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}}\Bigg)(\Delta x\Delta r + \Delta y\gamma) - \frac{r_i}{\Delta^2}(\Delta r\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \gamma\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}} + \frac{\Delta y}{\gamma}(\Delta x\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \Delta y\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}}))\Bigg)$$

$$\frac{\partial P_{i,y}}{\partial z_0} = \frac{d_{0,y}}{d_{0,z}}(1-i) + (-1)^i\Bigg(\frac{2r_i}{\Delta^4}\Bigg(\Delta x\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \Delta y\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}}\Bigg)(\Delta y\Delta r - \Delta x\gamma) + \frac{r_i}{\Delta^2}(-\Delta r\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}} + \gamma\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \frac{\Delta x}{\gamma}(\Delta x\frac{d_{0,x}}{d_{0,z}} + \Delta y\frac{d_{0,y}}{d_{0,z}}))\Bigg)$$

$$\frac{\partial P_{i,x}}{\partial z_1} = \frac{d_{1,x}}{d_{1,z}}(1-i) + (-1)^i\Bigg(-\frac{2r_i}{\Delta^4}\Bigg(\Delta x\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \Delta y\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}}\Bigg)(\Delta x\Delta r + \Delta y\gamma) + \frac{r_i}{\Delta^2}(\Delta r\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \gamma\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}} + \frac{\Delta y}{\gamma}(\Delta x\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \Delta y\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}}))\Bigg)$$

$$\frac{\partial P_{i,y}}{\partial z_1} = \frac{d_{1,y}}{d_{1,z}}(1-i) + (-1)^i\Bigg(-\frac{2r_i}{\Delta^4}\Bigg(\Delta x\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \Delta y\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}}\Bigg)(\Delta y\Delta r - \Delta x\gamma) - \frac{r_i}{\Delta^2}(-\Delta r\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}} + \gamma\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \frac{\Delta x}{\gamma}(\Delta x\frac{d_{1,x}}{d_{1,z}} + \Delta y\frac{d_{1,y}}{d_{1,z}}))\Bigg).$$

Правильность полученных формул проверялась путем установления сходимости к матричным элементам, вычисленным по формуле 14 элементов выборочной ковариационной матрицы координат точек касания при многократном разыгрывании радиусов дрейфовых окружностей и z–координат их центров в соответствии с ошибками их измерения.

6.2.2. Реконструкция цепей дублетов

Для построения сегмента трека, могущего служить отправной точкой для дальнейшей экстраполяции, дублеты объединяются в цепи. Длиной цепи называется количество дублетов (звеньев), из которых она составлена. Два дублета могут быть объединены в цепь, если:

- они имеют общую сработавшую проволочку и все их проволочки лежат в различных слоях ДК;

- различие z–координат дублетов находится в пределах нескольких ошибок измерений:

$$|z_{1,\,\mathrm{doublet\,PCA}} - z_{2,\,\mathrm{doublet\,PCA}}| < k\sqrt{\sigma^2_{z,1,\,\mathrm{doublet\,PCA}} + \sigma^2_{z,2,\,\mathrm{doublet\,PCA}}}, k = 5$$

Построение цепей идет от внешних слоев ДК к внутренним, так как плотность хитов на внешних слоях обычно минимальна. Поскольку данный дублет в общем случае может быть соединен с несколькими дублетами в следующем слое, мы строим и анализируем все возможные цепи заданной длины с началом в данном дублете, см. Рис. 37.

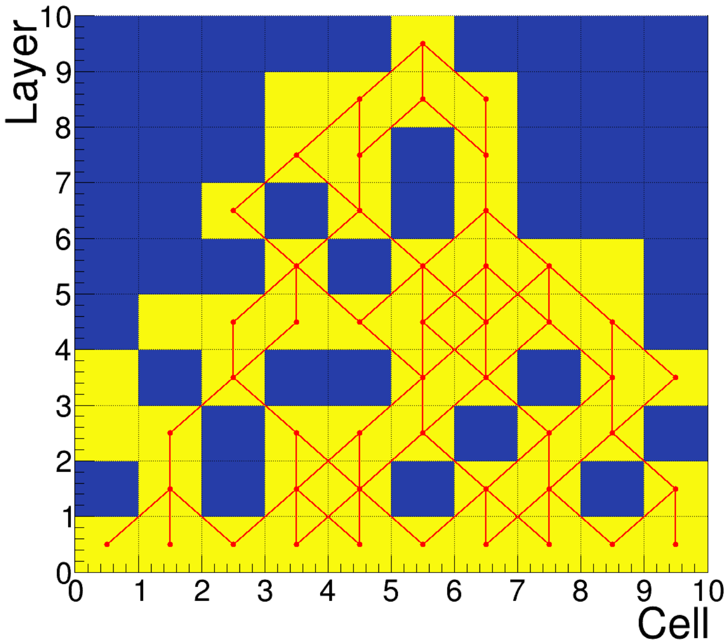


Рис. 37: Иллюстрация к построению всех возможных цепей, построенных начиная с одного дублета на внешнем слое. Желтые клетки условно изображают дублеты. Возможность соединения дублетов в цепь определяется отношениями соседства $\mathrm{layer}_1 - \mathrm{layer}_2 = 1$ и $|\mathrm{cell}_1 - \mathrm{cell}_2| \leq 1$. Возможные цепи дублетов, показаные красными графами, строятся рекурсивным алгоритмом от внешних слоев к внутренним.

Далее, если пренебречь поворотом трека в магнитном поле на масштабе нескольких ширин ячеек, то отдельная цепь длины больше 2 позволяет оценить направление пролета частицы, см. Рис. 38. Для этого все возможные траектории частицы (для цепи длины 4 их 32) сортируются по параметру, называемому нами “извилистостью” τ, равному сумме модулей углов между соседними касательными сегментами пути (т.е. сумме углов излома). Предполагается, что истинная траектория пролета находится в числе путей с наименьшим τ, и для нескольких из них мы проводим линейную аппроксимацию точек касания дрейфовых кружков. При этом у всех дублетов, кроме последнего, для фита берется точка касания к первому кружку, а у последнего дублета — точки касания к обоим кружкам.

Поскольку координаты точек касания имеют неопределенности в виде ковариационных матриц (корреляциями между координатами разных точек касания пренебрегаем), то корректный линейный фит таких данных должен был бы проводиться путем максимизации функции правдоподобия (т.н. "hyperfit", см. [28]). Задача такой максимизации требовала бы использования затратных итерационных методов поиска экстремума (градиентный спуск и т.д.), поэтому мы выбрали упрощающий подход. Направление $\vec{v}$ пролета частицы для данного пути может быть оценено по его начальной и конечной точкам касания. Для каждой точки, участвующей в фите, мы вычисляем неопределенность её положения в направлении, ортогональном $\vec{v}$. Далее, используя эти неопределенности, мы проводим ортогональный фит, минимизируя взвешенную сумму квадратов отклонений точек от прямой, что представляет собой простейший случай применения метода главных компонент и допускает аналитическое решение [29].

Найденные координаты и направление полета частицы и их неопределенности будут использованы для дальнейшей экстраполяции трека.

6.3. Аппроксимация треков

Аппроксимация трек–кандидатов производится в два шага:

- предварительный римановский фит [30], [31];
- финальный фит с фильтром Калмана [32], использующий результаты римановского фита в качестве начального приближения.

6.3.1. Римановский фит

Пусть в xy–плоскости даны проекции точечных хитов (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ и их ковариационные матрицы. Требуется найти центр (x_c, y_c) и радиус R окружности C, взвешенная сумма квадратов расстояний от которой до этих

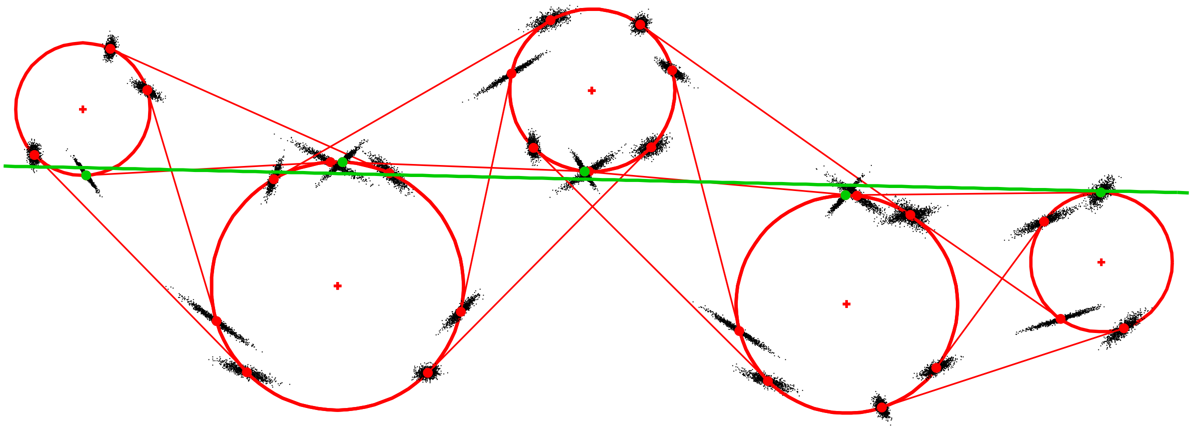


Рис. 38: Цепь дублетов длиной 4. Красные маркеры обозначают точки касания сегментов, “Облака” черных точек показывают неопределенность их положения согласно ковариационным матрицам. Зеленые маркеры обозначают точки касания, соответствующие пути с наименьшим χ^2 линейной аппроксимации (зеленая прямая).

точек минимальна. Идея римановского фита состоит в проектировании хитов на поверхность сферы Римана, или, в более простом варианте — на поверхность кругового параболоида $z = x^2 + y^2$: $(x_i, y_i) \mapsto \vec{r}_i = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$, см. Рис. 39. Принимая во внимание уравнение искомой окружности

$$C: \ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - R^2 = 0, \tag{16}$$

получаем, что при таком проектировании она перейдет в сечение параболоида плоскостью Π с уравнением

$$\Pi: \ z - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - R^2 = 0. \tag{17}$$

Обозначим за $\Delta_i \equiv \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}$ расстояние от хита (x_i, y_i) до центра C и за $\delta_i \equiv \Delta_i - R$ расстояние от хита до самой C . Тогда расстояние от проекции хита на параболоиде $\vec{r}_i$ до плоскости Π равно

$$\delta_i' = |x_i^2 + y_i^2 - 2x_c x_i - 2y_c y_i + x_c^2 + y_c^2 - R^2| = \delta_i(\Delta_i + R) \approx 2R\delta_i, \tag{18}$$

где мы учли приблизительное равенство $\Delta_i \approx R$ для хитов, лежащих вблизи круговой траектории. Итак, расстояние от хита до C в оговоренном приближении пропорционально расстоянию от проекции хита на параболоид до плоскости П. Поэтому задача поиска окружности C сводится к задаче поиска плоскости П, для которой взвешенная сумма квадратов расстояний до спроектированных хитов $\vec{r}_i$ будет минимальной.

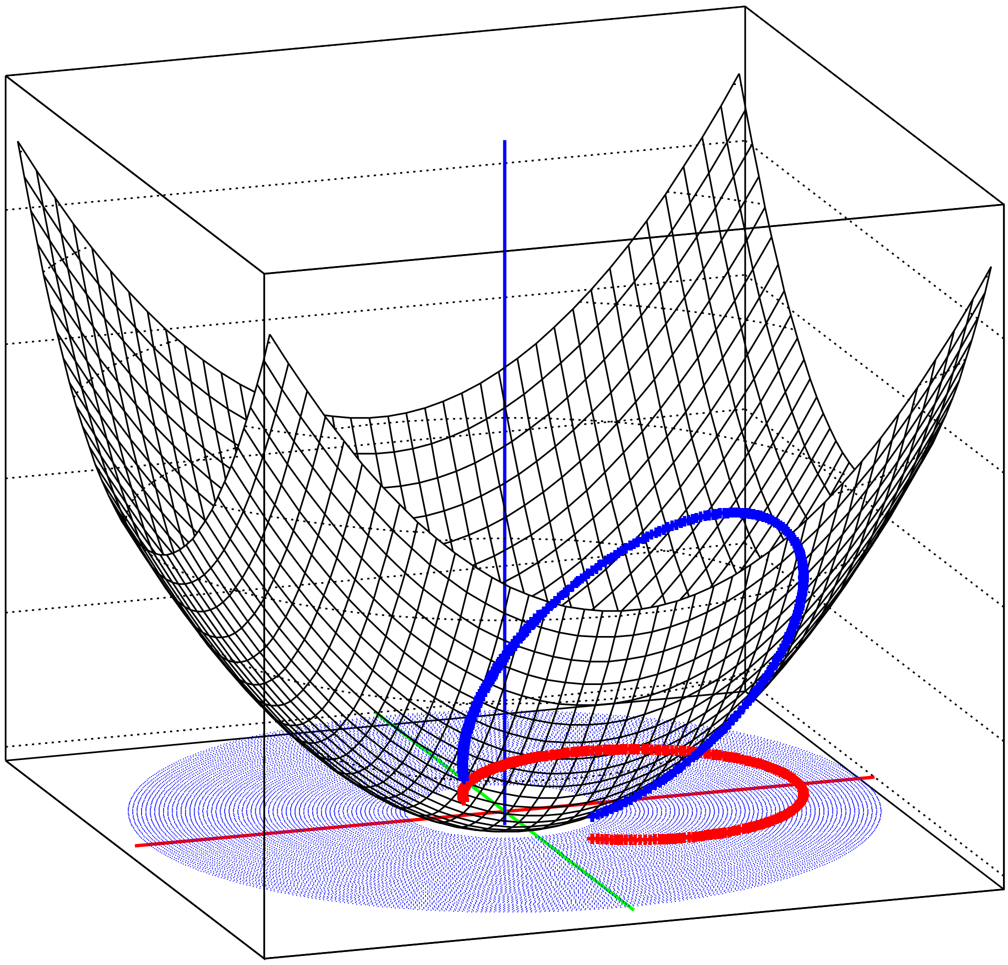


Рис. 39: Проекции точечных хитов на xy–плоскость (красные маркеры) и их проекции на поверхность кругового параболоида (синие маркеры).

Перепишем уравнение П в виде $(\vec{n}, \vec{r}) + c = 0$. Целевая функция, подлежащая минимизации, имеет вид

$$S(\vec{n}, c) = \sum_{i=1}^{n} w_i {\delta'_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i |(\vec{n}, \vec{r}_i) + c|^2, \tag{19}$$

где $w_i \equiv 1/\sigma_i^2$ — "вес" i–го хита, вычисляемый через неопределенность σ_i положения хита в направлении $\vec{m}$ к центру окружности. Эта неопределенность вычисляется через ковариационную матрицу (10) координат точечного хита по формуле

$$\sigma_i^2 = \vec{m}^T cov(x_i, y_i, z_i)\vec{m}, \ \ |\vec{m}| = 1, \tag{20}$$

где направление $\vec{m}$ берется из полного моделирования, а в будущем будет определяться в процессе поиска треков. Условие на экстремум $\partial S/\partial c = 0$ дает

$$c = -(\vec{n}, \vec{r}_0), \ \ \vec{r}_0 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Подставляя найденное значение c в S и вводя центрированные векторы хитов $\vec{r}_i^{\,c} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_0$, получаем

$$S(\vec{n}) = \vec{n}^T \Sigma \vec{n}, \ \ \Sigma \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{r}_i^{\,c} \otimes \vec{r}_i^{\,c}, \tag{21}$$

где Σ — выборочная ковариационная матрица. Как известно из метода главных компонент, $S(\vec{n})$ достигает минимума, если нормаль $\vec{n}$ к плоскости Π направлена вдоль собственного вектора Σ, отвечающего наименьшему собственному значению. Определив этот собственный вектор $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, мы пересчитываем найденные параметры плоскости Π в параметры окружности C:

$$x_c = -\frac{n_1}{2n_3}, \ \ y_c = -\frac{n_2}{2n_3}, \ \ R = \frac{\sqrt{1 - n_3^2 - 4cn_3}}{2n_3}. \tag{22}$$

Далее, для полной реконструкции спирали трека необходимо восстановить её параметры θ и z_0. Для этого каждому хиту (x_i, y_i) сопоставляется его радиальная проекция на C, и для проекции вычисляется длина дуги окружности s_i, отсчитываемая от PCA, см. Рис. 40. Таким образом, точечные хиты отображаются в sz–плоскость, и параметры θ и z_0 определяются путем линейной аппроксимации с учетом ошибок только по z, см. Рис. 41.

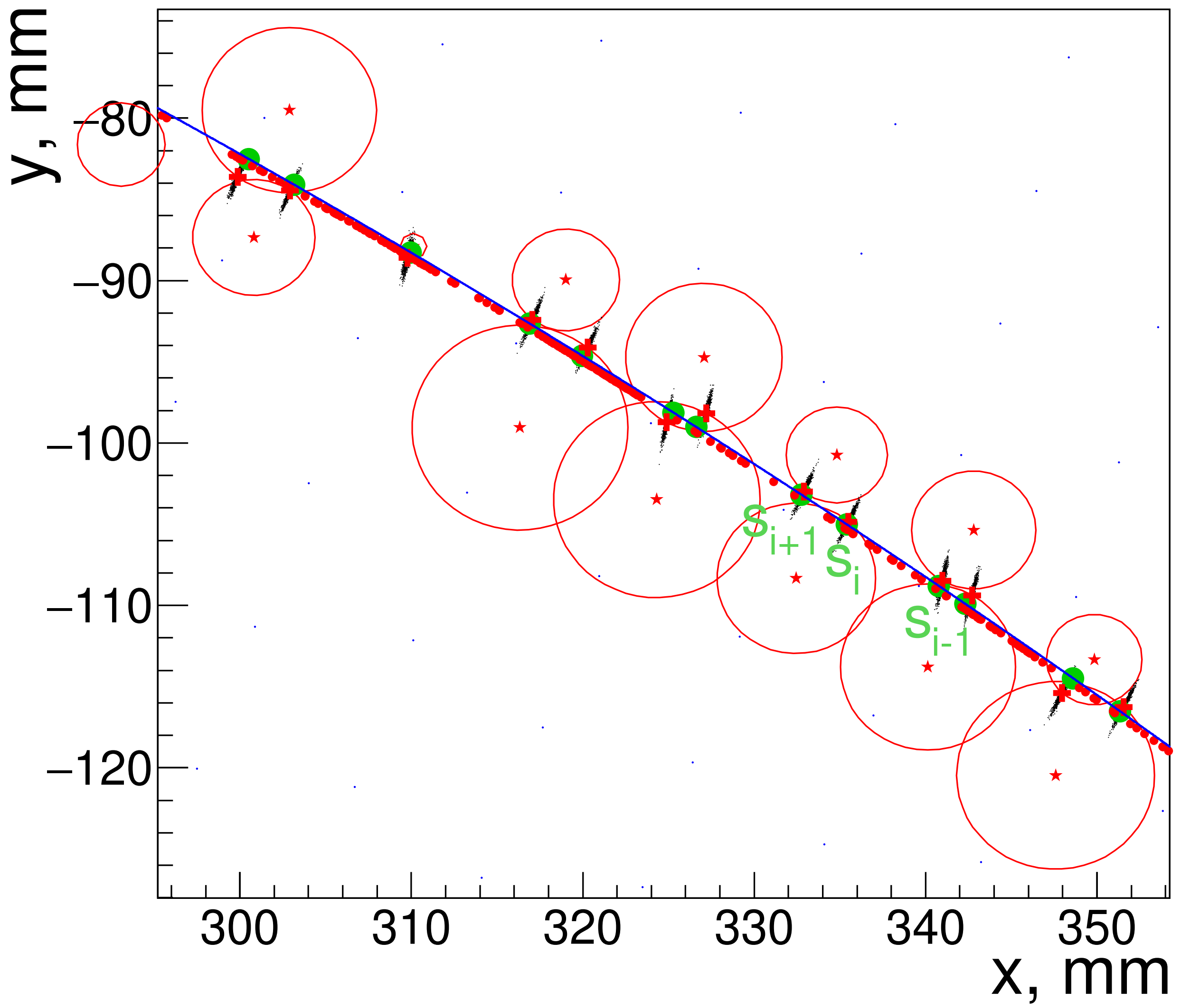


Рис. 40: Окружность трека частицы, реконструированная римановским фитом (синяя линия). Красными маркерами показаны ионизационные кластеры, красными окружностями — изохроны сработавших проволочек, красными крестиками — точечные хиты на изохронах, зелеными маркерами — проекции этих хитов на фитирующую окружность, используемые для вычисления длин дуг окружности s_i. "Облака" черных точек показывают неопределенность положений точечных хитов согласно ковариационным матрицам.

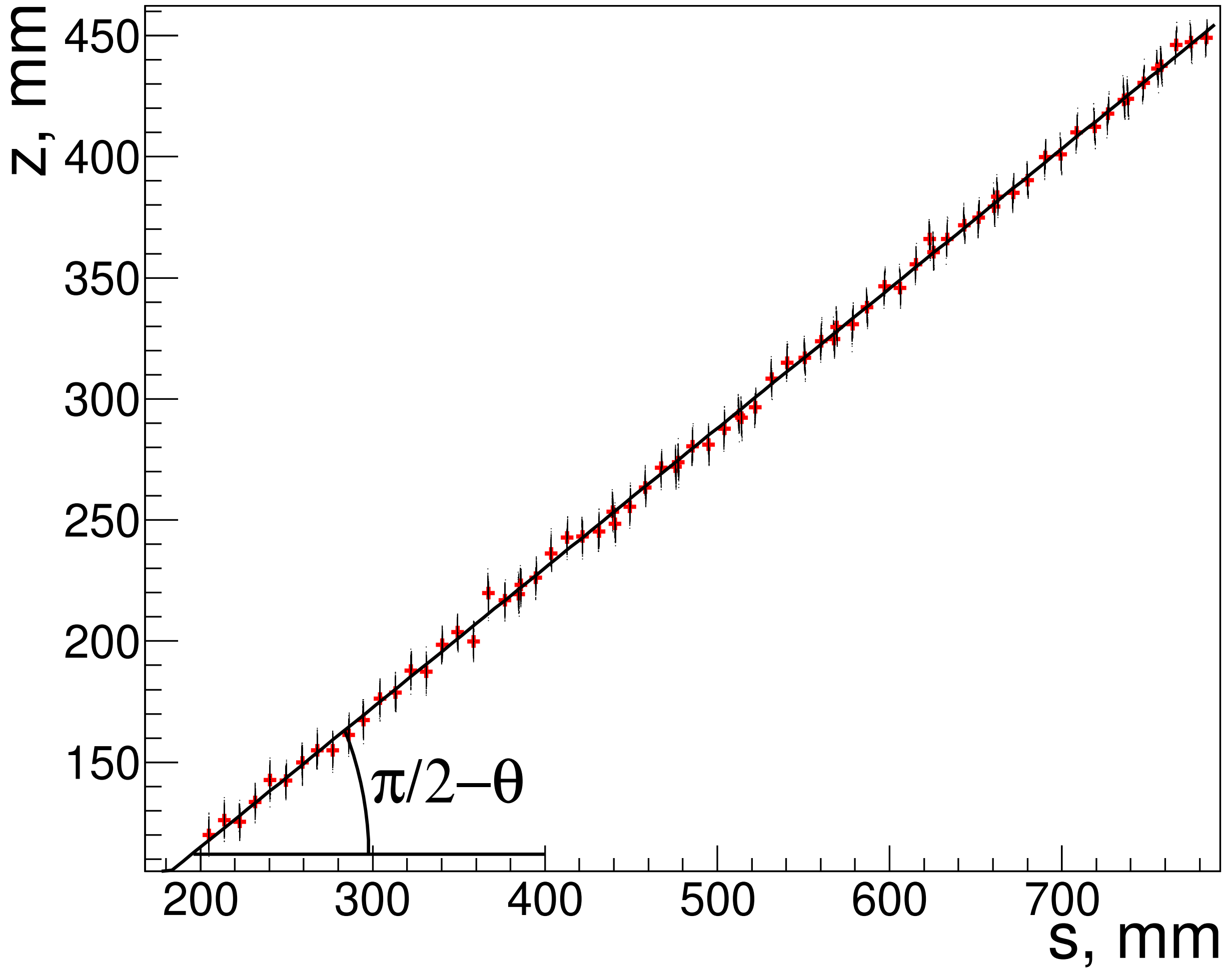


Рис. 41: Точечные хиты, отображенные на sz–плоскость (красные крестики) и их линейная аппроксимация. “Облака” черных точек показывают неопределенность положений хитов согласно ковариационным матрицам.

6.3.2. Аппроксимация треков с фильтром Калмана

Фильтр Калмана представляет собой рекурсивный алгоритм, предназначенный для оценки вектора состояния динамической системы на основе дискретизированного во времени набора зашумленных измерений. В случае ДК вектором состояния является вектор параметров трека, набором измерений — реконструированные хиты, ассоциированные с определенным трек–кандидатом. В данной работе мы используем реализацию фильтра Калмана, предоставляемую пакетом GenFit [32]. Работа фильтра состоит в последовательности шагов экстраполяции вектора состояния трека, каждый шаг включает в себя следующие действия:

- состояние трека и ковариационная матрица его параметров, полученная на предыдущем шаге, экстраполируются к месту следующего хита;
- на основе ковариационной матрицы хита и экстраполированной ковариационной матрицы трека вычисляется весовая матрица (т.н. *Kalman gain*);
- экстраполированное состояние трека и его ковариационная матрица корректируются (фильтруются) с учетом данного хита и весовой матрицы. Вычисляется χ^2 хита относительно отфильтрованного состояния трека.

Экстраполяция трека на каждом шаге производится с учетом материальных эффектов (многократное рассеяние и потери энергии), что требует воспроизведения в фиттере геометрии и вещества детектора. В качестве места, до которого на очередном шаге экстраполируется трек, в случае ДК выступает т.н. *виртуальная детекторная плоскость* (ВДП), содержащая ось проволочки и точку наибольшего к ней приближения (PCA) экстраполируемого трека, см. Рис. 42. Очевидно, что ВДП ортогональна направлению трека в PCA, а её пересечение с дрейфовым цилиндром проволочки дает два точечных хита. Возникающая из–за этого неопределенность лево–право разрешается в процессе фита, например, выбором ближайшего из них к экстраполированному состоянию.

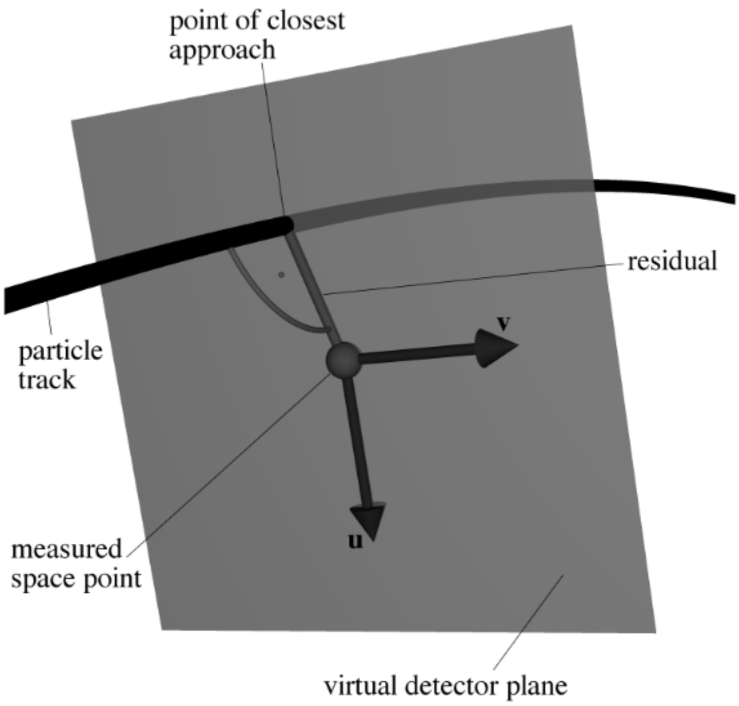


Рис. 42: Трек частицы и виртуальная детекторная плоскость, проходящая через проволочку и ортогональная треку в точке его наибольшего к ней приближения. Параметризация плоскости задается координатами v (вдоль проволочки) и u (перпендикулярно ей).

На Рис. 43 показан трек, аппроксимированный фильтром Калмана, в визуализаторе GenFit. Желтые линии соответствуют парам левых и правых хитов (ошибки измерения z–координаты увеличены до половины длины ДК для наглядности), серые плоскости — их ВДП. То же, но в увеличенном масштабе и без увеличения ошибок по z показано на Рис. 44. На Рис. 45 пары левых и правых хитов для наглядности соединены стрелками, аппроксимированный трек всегда проходит вблизи одного из них. Поперечный размер хита соответствует ошибке измерения прицельного параметра, и при прохождении трека близко к проволочке этот размер увеличивается из–за кластерного эффекта.

Результатом аппроксимации с фильтром Калмана в GenFit является вектор состояния трека (x, y, z, p_x, p_y, p_z) (координаты и импульс) и его ковариационная матрица на ВДП первого хита. Это состояние экстраполируется нами в PCA к оси пучков и пересчитывается в параметры k, φ, ρ, $ctg(\theta)$,

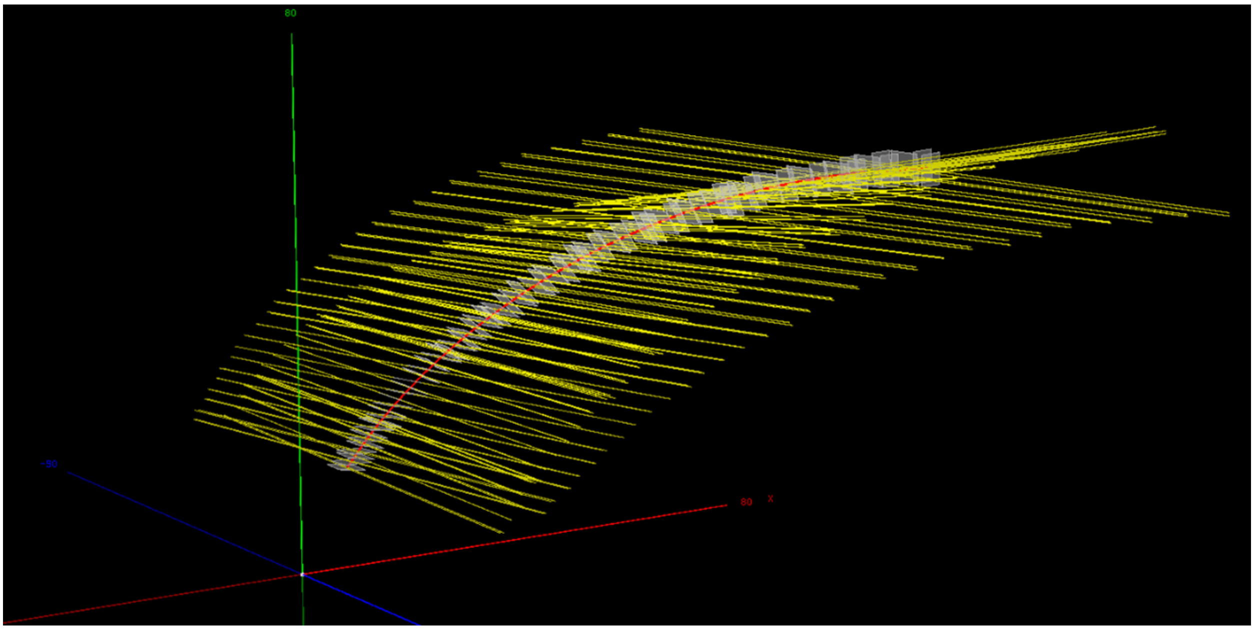


Рис. 43: Трек, аппроксимированный фильтром Калмана (красная линия). Желтые линии соответствуют парам левых и правых хитов (ошибки измерения z–координаты увеличены до половины длины ДК для наглядности), серые плоскости — их ВДП.

z_0. Для пересчета ковариационной матрицы используется якобиан

$$J = \frac{\partial(k, \varphi, \rho, ctg(\theta), z_0)}{\partial(x, y, z, p_x, p_y, p_z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k\dfrac{p_x}{p_\perp^2} & -k\dfrac{p_y}{p_\perp^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{p_y}{p_\perp^2} & -\dfrac{p_x}{p_\perp^2} & 0 \\ -\dfrac{p_y}{p_\perp} & \dfrac{p_x}{p_\perp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ctg(\theta)\dfrac{p_x}{p_\perp^2} & -ctg(\theta)\dfrac{p_y}{p_\perp^2} & \dfrac{1}{p_\perp} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности получаемой ковариационной матрицы параметров трека мы строим распределения разностей реконструированных и истинных (смоделированных) параметров трека, нормированных на ошибки их измерения согласно ковариационной матрице, см. Рис. 46. Все распределения неплохо согласуются с гауссовским распределением с нулевым средним, однако дисперсия, предсказываемая ковариационной матрицей, оказывается заниженной на 10–20%. Причины этого планируется установить в будущем.

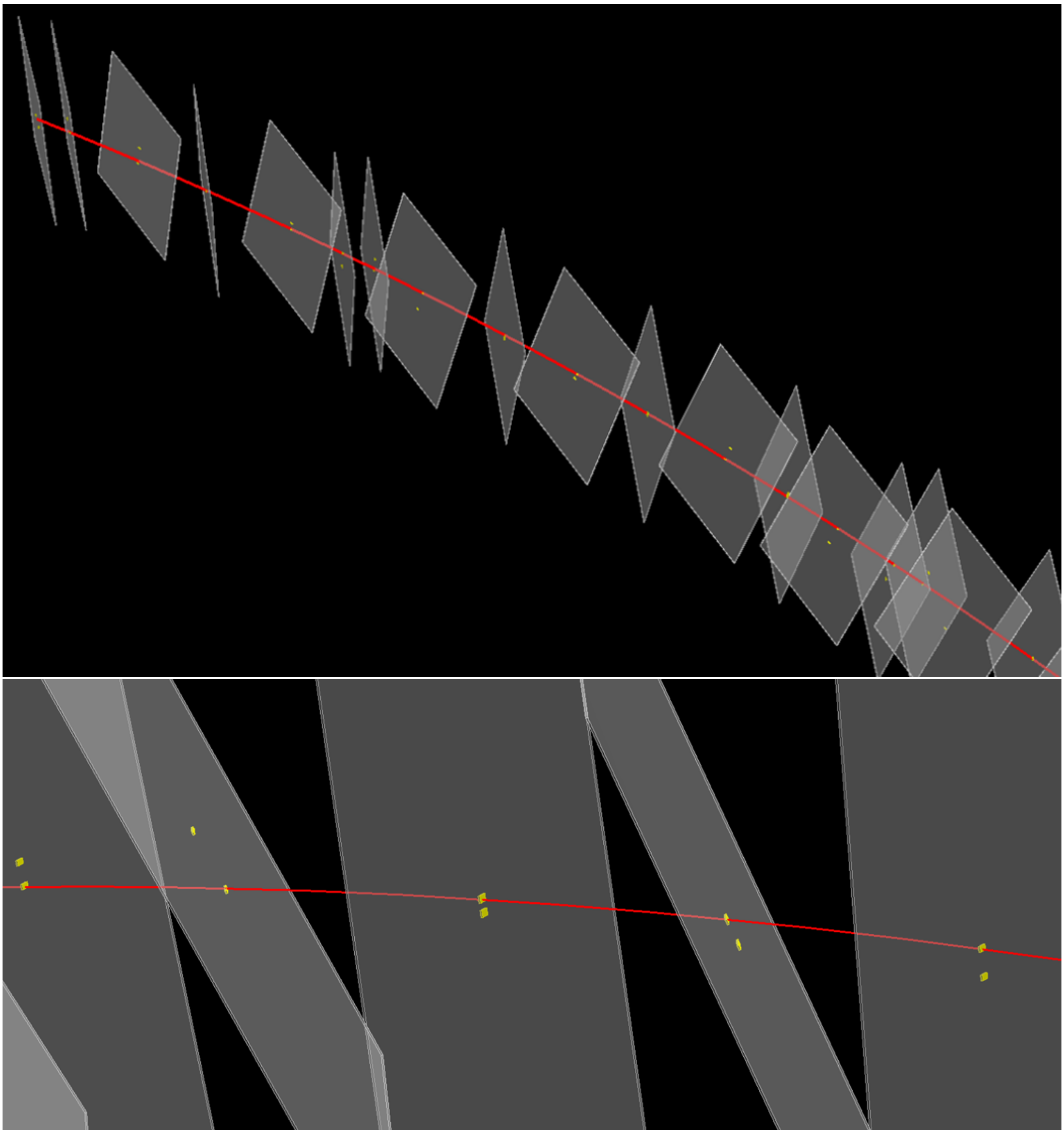


Рис. 44: Трек, аппроксимированный фильтром Калмана (красная линия). Желтые параллелепипеды соответствуют парам левых и правых хитов, серые плоскости — их ВДП.

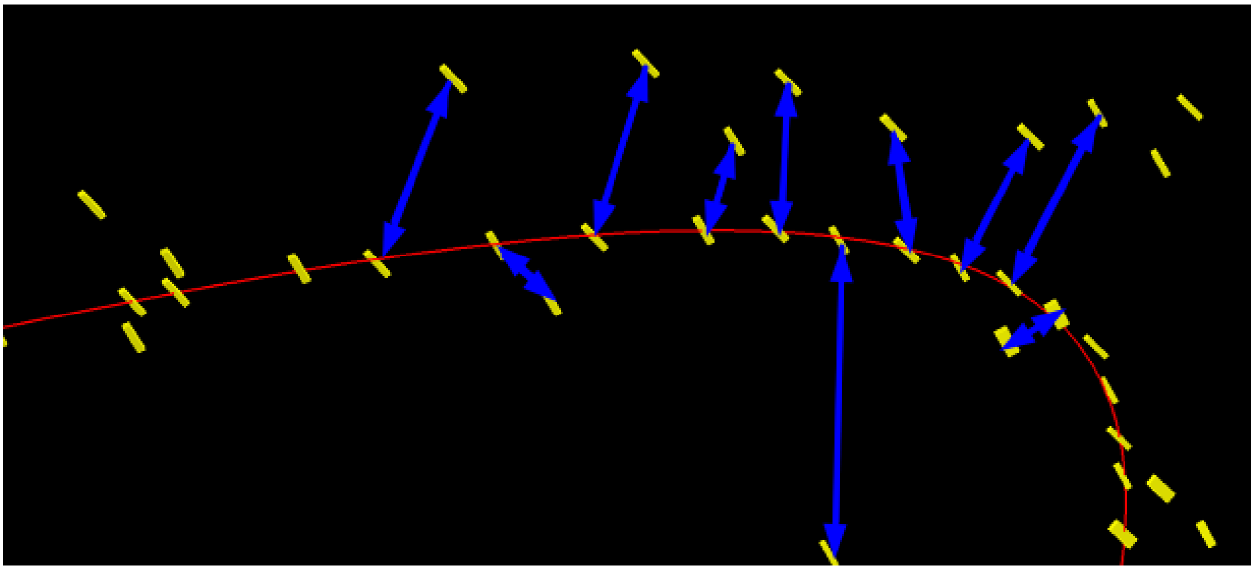


Рис. 45: Трек, аппроксимированный фильтром Калмана (красная линия). Пары левых и правых хитов для наглядности соединены синими стрелками.

Наконец, была выполнена предварительная оценка имульсного и углового разрешений ДК для треков, аппроксимированных римановским фитом и фильтром Калмана. Отметим, что разрешения для римановского фита существенно зависят от предполагаемой точности измерения z–координаты точечного хита в алгоритме поиска треков. В данной оценке мы положили её равной $\sigma_z = 10$ мм.

6.4. Заключение

В ходе данной работы было разработано базовое программное обеспечение моделирования дрейфовой камеры СЧТФ. Был разработан пакет, содержащий в себе весь необходимый инструментарий для работы с геометрией камеры начиная с генерации геометрии проволочек и заканчивая аппроксимацией треков. Был создан пакет программ для моделирования наведенных сигналов и их оцифровки. Созданы алгоритмы реконструкции хитов и их ассоциации с треками. Реализованы отдельные элементы алгоритма поиска треков. Разработана двухшаговая процедура аппроксимации треков с использованием римановского фита в качестве начального приближения для фита с фильтром Калмана. Наконец, произведена предварительная оценка углового и импульсного разрешений камеры.

Дальнейшая работа по моделированию ДК СЧТФ будет включать в себя:

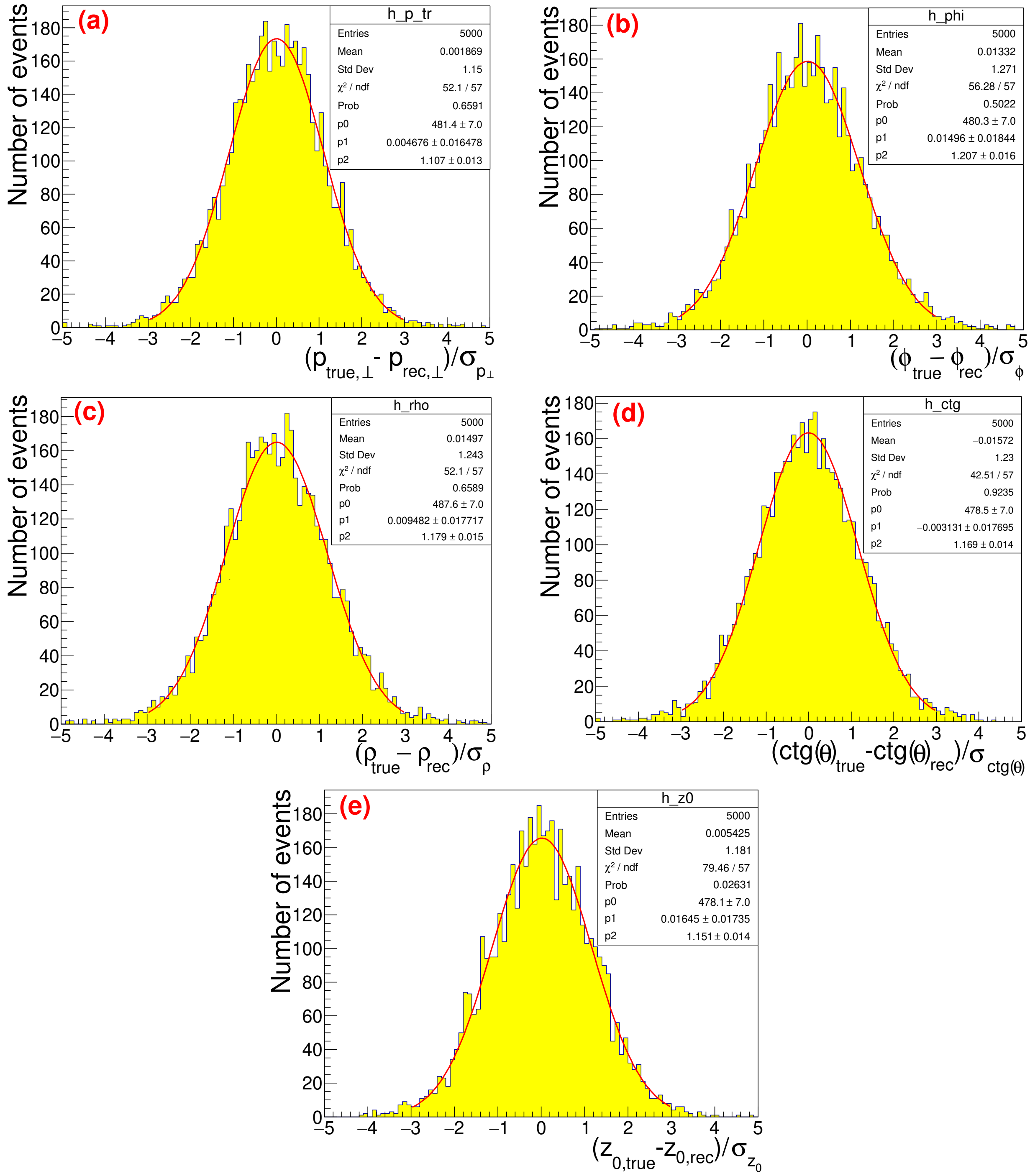


Рис. 46: Распределения нормированных разностей реконструированных и истинных параметров трека для мюонов с импульсом 1 ГэВ/с: (a) — для $p_\perp$; (b) — для φ; (c) — для ρ; (d) — для $ctg(\theta)$; (e) — для z_0.

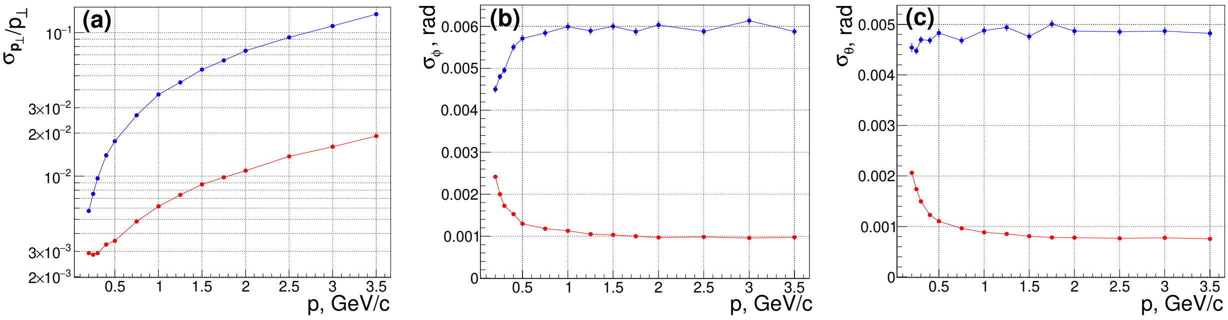


Рис. 47: Импульсное и угловое разрешения ДК СЧТФ, полученные в результате римановского фита (синяя кривая) и фита с фильтром Калмана (красная кривая): (a) – относительная точность измерения $p_\perp$, (b), (c) – точности измерения ϕ и θ, соответственно.

- завершение разработки алгоритма поиска треков, оценка его эффективности. Разработка альтернативных алгоритмов. Оценка эффективности алгоритмов поиска в условиях больших шумов и большой частоты фоновых событий. Сравнение с конфигурацией камеры с добавлением аксиальных слоев;

- реализация алгоритма поиска пиков в просканированной амплитуде проволочки, оценка его эффективности для различных типов частиц, углов и импульсов. Оценка возможности идентификации типа частицы по $dN_{\mathrm{clusters}}/dx$ и сравнение её эффективности с идентификацией по dE/dx;

- разработка алгоритма определения наиболее вероятного прицельного параметра трека при измеренных временах дрейфа кластеров, оценка возможного улучшения разрешения ДК;

- оценка возможного улучшения разрешения ДК при использовании проволочек, полученных магнетронным напылением металла на углеродную нить;

- разработка алгоритма реконструкции вершин;

- объединение ДК и внутреннего трекера в единую трековую систему, оценка улучшения разрешений;

- разработка пакета кинематического фита событий с использованием параметров объединенной трековой системы и калориметра. Финальная оценка разрешений в рамках анализа конкретных физических процессов.

Список литературы

[1] V. V. Anashin and et al. Super Charm - Tau Factory. *Conceptual Design Report. Part One (physics program, detector)*, 2018.

[2] F. Grancagnolo. An ultra-low mass Tracking Chamber with Particle Identification capabilities for SCTF at BINP. `https://indico.ijclab.in2p3.fr/event/4902/contributions/17030/attachments/13603/16389/SCTFDrift_Chamber.pdf`, 2018.

[3] I. Yu. Basok and et al. The drift chamber project for the Super Charm-Tau Factory detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Acceleratos, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1009, 2021.

[4] A. Yu. Barnyakov. Particle identification system for the Super Charm-Tau Factory at Novosibirsk. *15th Vienna Conference on Instrumentation (VCI2019)*, 2019.

[5] E. Prokhorova. Study of the fast calorimeter prototype for the Super Charm-Tau Factory. *EPJ Web Conf.*, 212(01007), 2019.

[6] V. L. Ivanov and et al. Simulation of the CsI crystal calorimeter of the detector of charm-tau factory in Novosibirsk. *Journal of Instrumentation*, 15, 2020.

[7] Rene Brun and Fons Rademakers. ROOT – An Object Oriented Data Analysis Framework. *Proceedings AIHENP'96 Workshop, Lausanne, Nucl. Inst. Meth. in Phys. Res. A 389 (1997) 81-86.*, 1996.

[8] Super C–Tau Detector. Структура релиза, 2018. https://ctd.inp.nsk.su/wiki/index.php/.

[9] GEANT4 Collaboration (Agostinelli, S. et al.). GEANT4: A Simulation toolkit. *Nucl.Instrum.Meth. A506 250-303 SLAC-PUB-9350, FERMILAB-PUB-03-339*, 2003.

[10] Frank, Markus et al. DD4hep: A Detector Description Toolkit for High Energy Physics Experiments.

[11] H. Schnidler. Garfield++ User Guide. *User Manual*, 2021.1, 2020.

[12] O Sahin and et al. Penning transfer in argon-based gas mixtures. *Journal of Instrumentation*, 5, 2010.

[13] Werner Riegler. *Limits to Drift Chamber Resolution*. PhD thesis, Technischen Universit at Wien, 1997.

[14] Luigi Rolandi and et al. *Particle Detection with Drift Chambers*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[15] Gianluigi Chiarello, Claudio Chiri, Giuseppe Cocciolo, A. Corvaglia, Francesco Grancagnolo, Marco Panareo, Aurora Pepino, and Giovanni Tassielli. *The Use of FPGA in Drift Chambers for High Energy Physics Experiments*. 05 2017.

[16] L. Cappelli and et al. A fast readout algorithm for Cluster Counting/Timing drift chambers on a FPGA board. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2013.

[17] Игнатов Ф. В. *Измерение формфактора пиона в диапазоне энергий 1.04 - 1.38 ГэВ с детектором КМД-2*. PhD thesis, 2008.

[18] Rudolf Fruhwirth and Are Strandlie. *Pattern Recognition, Tracking and Vertex Reconstruction in Particle Detectors*. 01 2021.

[19] Belle II Tracking Group. Track finding at Belle II. *Computer Physics Communications*, 259, 2021.

[20] T. Alexopoulos and et al. Implementation of the Legendre Transform for track segment reconstruction in drift tube chambers. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2008.

[21] Emeliyanov D. and et al. Cellular automation and Kalman filter based track search in the HERA-B pattern tracker. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A, Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 490(3), 2002.

[22] Boutigny, D. and others. BaBar technical design report. 3 1995.

[23] T. Abe and et al. BelleII. *Technical Design Report*, 2010.

[24] M. Adinolfi and et al. The tracking detector of the KLOE experiment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2002.

[25] G. Tassielli and et al. The drift chamber of the MEG II experiment. *Journal of Instrumentation*, 2020.

[26] G. Cataldi and et al. Straight tracks reconstruction in all stereo drift chambers. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 1996.

[27] Rainer Mankel. A concurrent track evolution algorithm for pattern recognition in the HERA-B main tracking system. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 1997.

[28] Aaron Robotham. Hyper-Fit: Fitting Linear Models to Multidimensional Data with Multivariate Gaussian Uncertainties. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2015.

[29] Leonardo Romero and et al. A tutorial on the total least squares method for fitting a straight line and a plane. 2014.

[30] A. Strandlie and et al. Treatment of multiple scattering with the generalized Riemann sphere track fit. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2002.

[31] A. Strandlie and et al. Exploration and extension of an improved Riemann track fitting algorithm. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 867, 2017.

[32] Johannes Rauch and Tobias Schluter. GENFIT – a Generic Track-Fitting Toolkit. *J. Phys. Conf. Ser.*, 608(1):012042, 2015.